

demande de trouver la valeur numérique d'autres grandeurs inconnues. En outre, le *Libellus* ne contient pas de démonstrations, du moins selon les modalités classiques. Enfin, il s'inscrit aussi dans la tradition de l'abaque, parce que, dans le calcul des grandeurs géométriques, il utilise autant des procédures géométriques que des règles arithmétiques et algébriques.

D'un autre côté, le *Libellus* s'inscrit dans la tradition euclidienne par l'ordre logique des propositions et par des références aux *Éléments* d'Euclide et aux œuvres d'Archimède *De la sphère et du cylindre* et *Des conoïdes et des sphéroïdes*. Les théorèmes n'y sont pas dégradés en petites règles empiriques appliquées, usage courant chez les techniciens, qui préféraient une règle simple et approximative à une règle exacte, mais complexe : ils sont utilisés de façon coordonnée.

Mélanger théorie et application

Ce mélange de mathématique «haute» et «basse» devait apparaître à Piero comme un tout homogène ou, du moins, lié. Il fait siens avec maestria les théorèmes du livre XIII des *Éléments*, qui établissent les relations entre les longueurs des arêtes des polyèdres et le diamètre de la sphère circonscrite. Il écrit que l'arête du tétraèdre est la moyenne géométrique (la racine carrée du produit) de la hauteur du tétraèdre et du diamètre de la sphère circonscrite, ou que l'arête du dodécaèdre est la section d'or de l'arête du cube inscrit dans la même sphère (la section d'or d'un segment AB est réalisée en un point M du segment AB tel que le rapport des longueurs AB à AM soit égal au rapport des longueurs AM à MB). En même temps, il dresse le tableau des valeurs numériques des arêtes des cinq polyèdres réguliers (tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre) inscrits dans une sphère de diamètre 12. Ce qui nous semble un cas particulier satisfaisait pleinement le milieu de l'abaque, car 12 est multiple de 2, 3, 4 et 6 : si le diamètre de la sphère était triple ou de moitié, il suffisait respectivement de multiplier par trois ou de diviser par deux la valeur de l'arête.

Toutefois, même s'il utilise le style de l'abaque, Piero s'inspire d'Euclide. Celui-ci conclut les *Éléments* avec un théorème qui relie les arêtes des poly-

èdres inscrits dans une même sphère ; Piero conclut de la même manière le second chapitre du *Libellus*, mais avec des valeurs numériques, avec les mesures des arêtes des polyèdres inscrits dans la sphère de diamètre 12.

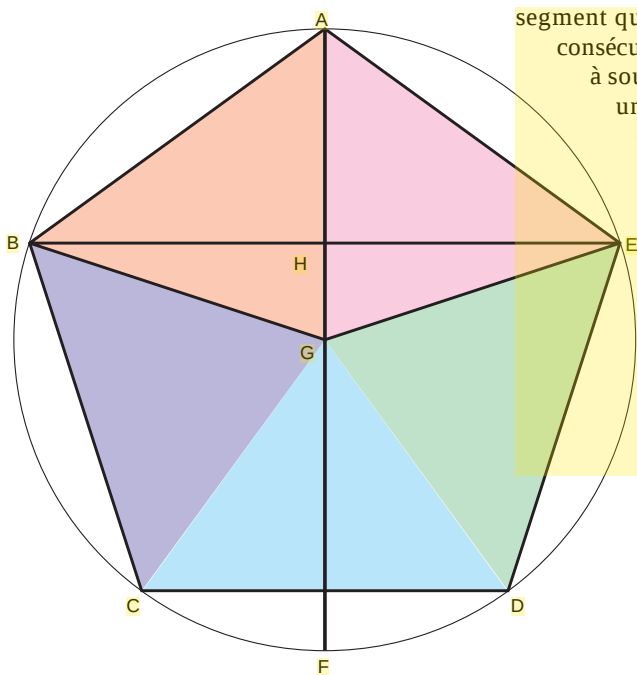
La donnée de valeurs numériques simples était nécessaire pour les techniciens, qui, peu familiers avec l'écriture et soucieux de préserver les secrets de leur profession, faisaient confiance à leur mémoire. Pour les commerçants, le calcul mental rapide était vital : dans une négociation, il faut évaluer rapidement les bénéfices des deux parties. La mémorisation de règles synthétiques, comme des proverbes, et de paramètres numériques était la méthode la plus sûre, la plus écono-

mique et la plus rapide. En conséquence, la règle de trois était fréquemment utilisée en géométrie (ce qui n'est pas le cas aujourd'hui).

La règle de trois a peut-être aussi donné à Piero l'idée de son calcul de l'aire du pentagone régulier. Dans le livre XIV des *Éléments* (qui n'est pas d'Euclide, mais d'Hypsicle, et qui était connu du temps de Piero comme le livre XV), on trouve la formule suivante : l'aire est égale au produit des $3/4$ du diamètre du cercle circonscrit par les $5/6$ de la corde du pentagone. Piero propose une formule plus simple (voir la figure 2) : l'aire d'un pentagone régulier est déterminée par les $5/8$ du produit du diamètre du cercle circonscrit par la longueur de la corde du pentagone (le



1. PORTRAIT DE PIERO DELLA FRANCESCA attribué à Santi di Tito, probablement réalisé à la fin du XVI^e siècle. L'auteur du portrait a davantage rendu hommage au mathématicien qu'à l'artiste : les œuvres d'Euclide et d'Archimède posées sur la table sont éloquentes.



segment qui joint deux sommets consécutifs). L'invention prête à sourire : pour nous, c'est une banale simplification de fractions. Toutefois Piero envisageait probablement la chose différemment : il devait démontrer la nouvelle formule, et la simplification ne prouvait pas son résultat, elle le confirmait tout au plus.

Les démonstrations utilisées dans toutes les branches des mathématiques étaient du type de celles qu'utilisent les géomètres. Dès 1202, Léonard de Pise établit les formules de résolution des équations du second degré avec des démonstrations géométriques, en se fondant sur des propositions énoncées géométriquement dans les *Éléments*. Piero, lui, élabore une démonstration de la formule qui donne l'aire du pentagone, en utilisant la règle de trois d'une manière nouvelle par rapport à la traduction euclidienne (voir la figure 2).

Nous avons signalé la supériorité évidente du *Libellus* par rapport aux manuels de l'époque : on peut en dire autant du traité de perspective *De prospectiva pingendi*. Piero y adopte un discours résolument déductif et s'élève contre les énumé-

rations et les comptes rendus plus ou moins ordonnés auxquels parvenaient les meilleurs techniciens contemporains.

En ce qui concerne la géométrie savante, Piero montre une parfaite compréhension de l'œuvre euclidienne, envisagée toutefois du point de vue de l'abaque. La liberté qui en découle ouvre des voies nouvelles ou rarement empruntées : dans le *Libellus*, il reprend le thème des inclusions réciproques de polyèdres réguliers, développé dans le livre XV des *Éléments*, en y ajoutant une nouvelle inclusion, celle de l'icosaèdre dans le cube (voir la figure 6).

Si Piero transpose Euclide dans le domaine de l'abaque, il utilise aussi ses talents artistiques en géométrie. L'inclusion de l'icosaèdre dans le cube est «vue» et «tracée», avant d'être démontrée, à partir de propriétés géométriques. Piero dessine une perspective à lignes de fuite parallèles plutôt qu'une perspective à lignes de fuite convergentes, selon le procédé inventé par Brunelleschi et Alberti, et théorisé par Piero dans son propre traité de perspective, parce que le raisonnement géométrique est ainsi plus clair : c'est une innovation remarquable. Piero est l'un des fondateurs du dessin technique et géométrique moderne : si l'on compare ses dessins avec les figures géométriques qui illustrent les éditions d'Euclide de l'époque, on constate des différences abyssales. Son œuvre, comme celles d'autres auteurs, reflète la demande d'un nombre croissant de techniciens qui souhaitaient disposer de constructions graphiques non équivoques et fiables.

Un polyèdre à 72 faces

Piero della Francesca prolonge aussi les recherches d'autres mathématiciens savants. Il souligne, dans l'une des rares notes qu'il ajoute à ses traités, qu'il va plus loin que Giovanni Camparo da Novara, mathématicien du XIII^e siècle dont la traduction, de l'arabe en latin des *Éléments* d'Euclide, était très lue à l'époque. Le problème concerne un solide à 72 faces, qui est un bon modèle à facettes de la sphère, dont Piero calcule la surface et le volume. La surface est la somme des surfaces de 24 triangles isocèles et de 48 trapèzes isocèles ; le volume est la somme des volumes des 24 pyramides à base triangulaire et des 48 pyramides à base trapézoïdale dont le sommet est le centre de la sphère circonscrite.

2. DÉMONSTRATION, dans le style de l'abaque, de la formule servant à calculer l'aire du pentagone. Le produit $AG \times BE$ est la surface de quatre des cinq triangles isocèles de sommet G qui constituent le pentagone (l'aire d'un triangle est la moitié du produit de sa base par sa hauteur). Par quelle fraction x du rayon faut-il multiplier la corde BE du pentagone pour obtenir la surface de cinq triangles ? x est la solution de l'équation : $(AG \times BE) / 4 = (x \times BE) / 5$. On obtient donc $x = (5/4) AG = (5/8) AF$. La surface du pentagone s'obtient en multipliant $5/8$ du diamètre par le segment BE , formule dont Piero s'attribue l'invention. L'utilisation géométrique de la règle de trois est assez insolite.



3. LES CINQ POLYÈDRES RÉGULIERS, dits aussi «solides» ou «corps platoniciens», sont des figures de l'espace à trois dimensions que l'on construit avec des faces polygonales identiques entre elles et elles-mêmes régulières. Ils sont représentés ici par Kepler dans son traité *Harmonice Mundi* (1619). Platon les associait aux cinq éléments de sa «physique». Le tétraèdre (associé au feu par Platon) a 4 faces en forme de triangles équilatéraux identiques (au centre) ; le cube, ou hexaèdre (associé à la terre) a 6 faces en forme de carrés (en bas, à gauche) ; l'octaèdre formé de deux «pyramides d'Égypte» accolées par leurs bases carrées (associé à l'air) a 8 faces triangulaires équilatérales (en haut, à gauche) ; le dodécaèdre (associé à l'éther du monde supralunaire) a 12 faces pentagonales (en haut, à droite) ; enfin l'icosaèdre (associé à l'eau) comporte 20 faces triangulaires équilatérales (en bas, à droite).