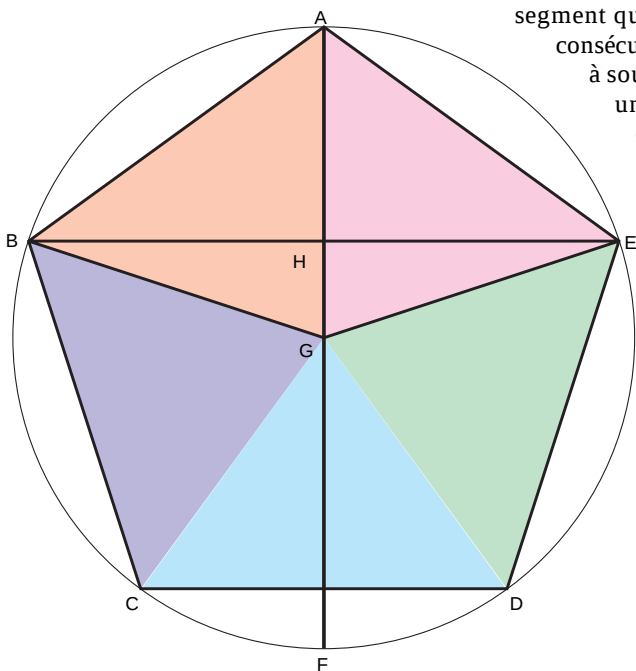




segment qui joint deux sommets consécutifs). L'invention prête à sourire : pour nous, c'est une banale simplification de fractions. Toutefois Piero envisageait probablement la chose différemment : il devait démontrer la nouvelle formule, et la simplification ne prouvait pas son résultat, elle le confirmait tout au plus.

Les démonstrations utilisées dans toutes les branches des mathématiques étaient du type de celles qu'utilisent les géomètres. Dès 1202, Léonard de Pise établit les formules de résolution des équations du second degré avec des démonstrations géométriques, en se fondant sur des propositions énoncées géométriquement dans les *Éléments*. Piero, lui, élabore une démonstration de la formule qui donne l'aire du pentagone, en utilisant la règle de trois d'une manière nouvelle par rapport à la traduction euclidienne (voir la figure 2).

Nous avons signalé la supériorité évidente du *Libellus* par rapport aux manuels de l'époque : on peut en dire autant du traité de perspective *De prospectiva pingendi*. Piero y adopte un discours résolument déductif et s'élève contre les énumé-

rations et les comptes rendus plus ou moins ordonnés auxquels parvenaient les meilleurs techniciens contemporains.

En ce qui concerne la géométrie savante, Piero montre une parfaite compréhension de l'œuvre euclidienne, envisagée toutefois du point de vue de l'abaque. La liberté qui en découle ouvre des voies nouvelles ou rarement empruntées : dans le *Libellus*, il reprend le thème des inclusions réciproques de polyèdres réguliers, développé dans le livre XV des *Éléments*, en y ajoutant une nouvelle inclusion, celle de l'icosaèdre dans le cube (voir la figure 6).

Si Piero transpose Euclide dans le domaine de l'abaque, il utilise aussi ses talents artistiques en géométrie. L'inclusion de l'icosaèdre dans le cube est «vue» et «tracée», avant d'être démontrée, à partir de propriétés géométriques. Piero dessine une perspective à lignes de fuite parallèles plutôt qu'une perspective à lignes de fuite convergentes, selon le procédé inventé par Brunelleschi et Alberti, et théorisé par Piero dans son propre traité de perspective, parce que le raisonnement géométrique est ainsi plus clair : c'est une innovation remarquable. Piero est l'un des fondateurs du dessin technique et géométrie moderne : si l'on compare ses dessins avec les figures géométriques qui illustrent les éditions d'Euclide de l'époque, on constate des différences abyssales. Son œuvre, comme celles d'autres auteurs, reflète la demande d'un nombre croissant de techniciens qui souhaitaient disposer de constructions graphiques non équivoques et fiables.

Un polyèdre à 72 faces

Piero della Francesca prolonge aussi les recherches d'autres mathématiciens savants. Il souligne, dans l'une des rares notes qu'il ajoute à ses traités, qu'il va plus loin que Giovanni Camparo da Novara, mathématicien du XIII^e siècle dont la traduction, de l'arabe en latin des *Éléments* d'Euclide, était très lue à l'époque. Le problème concerne un solide à 72 faces, qui est un bon modèle à facettes de la sphère, dont Piero calcule la surface et le volume. La surface est la somme des surfaces de 24 triangles isocèles et de 48 trapèzes isocèles ; le volume est la somme des volumes des 24 pyramides à base triangulaire et des 48 pyramides à base trapézoïdale dont le sommet est le centre de la sphère circonscrite.

2. DÉMONSTRATION, dans le style de l'abaque, de la formule servant à calculer l'aire du pentagone. Le produit $AG \times BE$ est la surface de quatre des cinq triangles isocèles de sommet G qui constituent le pentagone (l'aire d'un triangle est la moitié du produit de sa base par sa hauteur). Par quelle fraction x du rayon faut-il multiplier la corde BE du pentagone pour obtenir la surface de cinq triangles ? x est la solution de l'équation : $(AG \times BE)/4 = (x \times BE)/5$. On obtient donc $x = (5/4) AG = (5/8) AF$. La surface du pentagone s'obtient en multipliant $5/8$ du diamètre par le segment BE , formule dont Piero s'attribue l'invention. L'utilisation géométrique de la règle de trois est assez insolite.



3. LES CINQ POLYÈDRES RÉGULIERS, dits aussi «solides» ou «corps platoniciens», sont des figures de l'espace à trois dimensions que l'on construit avec des faces polygonales identiques entre elles et elles-mêmes régulières. Ils sont représentés ici par Kepler dans son traité *Harmonice Mundi* (1619). Platon les associait aux cinq éléments de sa «physique». Le tétraèdre (associé au feu par Platon) a 4 faces en forme de triangles équilatéraux identiques (au centre) ; le cube, ou hexaèdre (associé à la terre) a 6 faces en forme de carrés (en bas, à gauche) ; l'octaèdre formé de deux «pyramides d'Égypte» accolées par leurs bases carrées (associé à l'air) a 8 faces triangulaires équilatérales (en haut, à gauche) ; le dodécaèdre (associé à l'éther du monde supralunaire) a 12 faces pentagonales (en haut, à droite) ; enfin l'icosaèdre (associé à l'eau) comporte 20 faces triangulaires équilatérales (en bas, à droite).