

Piero trouve la hauteur de ces pyramides selon les strictes modalités euclidiennes.

Ce problème du polyèdre à 72 faces a un intérêt architectural : il se présente lors de la construction des coupoles, et des polyèdres analogues étaient utilisés pour la construction de globes géographiques et astronomiques. La solution de Piero est générale : elle serait valable

même si le solide, au lieu d'être construit à partir de dodécagones, était construit sur la base d'autres polygones réguliers.

À l'époque, une évolution décisive apparaît : les nouvelles découvertes techniques incitent les ingénieurs à dépasser l'empirisme et à utiliser des procédures mathématiques rigoureuses. Piero résout, dans cet esprit, deux autres problèmes originaux : le calcul du

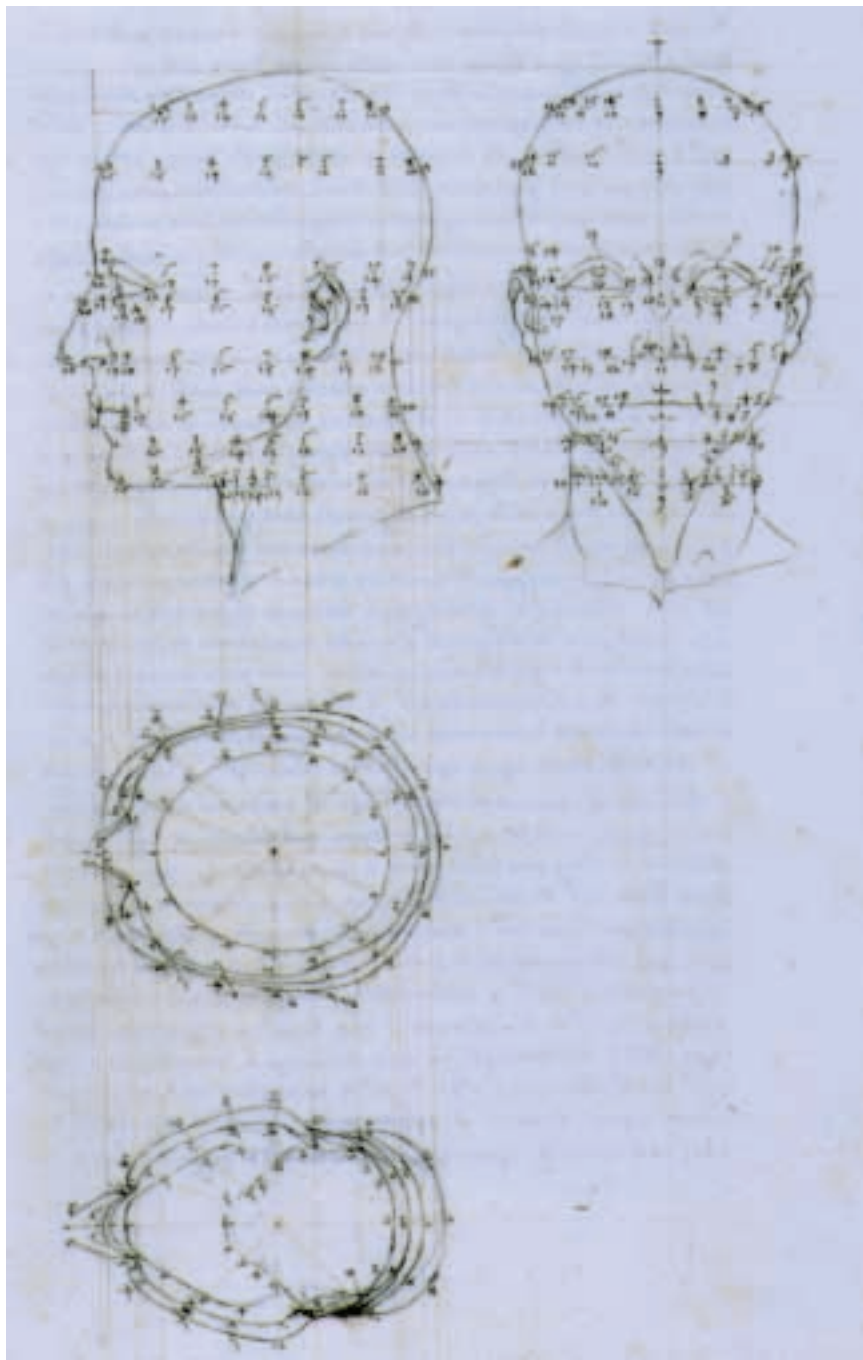
volume sous la voûte en arc de cloître (ou voûte d'angle) et celui de la surface de la voûte d'arête (voir l'encadré de la page 71). L'œil du mathématicien contemple les réalisations techniques et trouve de nouvelles voies de recherche.

Euclide n'étant pas d'une grande utilité pour résoudre ce problème, Piero utilise de téméraires analogies avec les procédures d'Archimède. Étonnamment, il obtient des résultats exacts, qui prouvent son intuition mathématique. De la manière laconique qu'il affectionne, il fait comprendre qu'il a obtenu un résultat important. Après avoir effectué ses calculs sans indiquer les procédures adoptées (les écrits de l'abaque exposent les résultats sans les expliquer), Piero transgresse les habitudes et se lance dans l'explication de la voie qu'il a empruntée. Cette explication n'est pas un modèle de clarté, mais on ne peut guère en attendre plus d'un auteur du XV^e siècle. Piero della Francesca est l'un des rares auteurs qui ait relié avec agilité le «grand système» des mathématiques d'Euclide et d'Archimède au «petit système» des mathématiques de l'abaque. Ce lien a pris de plus en plus d'importance au long du XVI^e siècle.

Enseignement pratique et algèbre

L'enseignement des écoles d'abaque se fondait sur le calcul appliqué. Les professeurs fournissaient à leurs élèves des séries de problèmes typiques de leur profession : achat et vente, change, associations, capitalisation, mesures. Cette façon de procéder, en accordant plus d'importance aux valeurs numériques, est la caractéristique la plus originale par rapport à la tradition euclidienne : elle favorise l'intérêt pour l'algèbre, efficace pour résoudre des problèmes, même géométriques. Outre l'introduction des chiffres arabes, le grand mérite historique des professeurs d'abaque est d'avoir, pendant le Moyen Âge, diffusé et développé la connaissance de l'algèbre en Europe.

Dans l'histoire de l'algèbre, Piero della Francesca arrive juste avant le progrès fondamental qu'est la résolution des équations du troisième degré, et dans la phase de transition d'une algèbre rhétorique, exposée de manière discursive, à une algèbre qui utilise des abréviations et des symboles. Le texte où Piero a rassemblé ses recherches algébriques n'avait pas



4. CETTE TÊTE, représentée de face, de profil, par-dessus et par-dessous suivant des projections orthogonales, est extraite de *De prospectiva pingendi*, de Piero della Francesca. La représentation est tracée par points, déterminés par l'intersection des lignes et repérée par des nombres. Piero veut ainsi montrer que la peinture n'est pas d'abord une œuvre manuelle : avant la réalité sensible, existent la perfection géométrique, les lois de l'harmonie et des proportions. Il n'y a donc pas de dissension entre la science et l'art.

de titre : il a été nommé, *a posteriori*, *Trattato d'abaco*. C'est un texte singulier par rapport aux ouvrages d'abaque habituels, tant en raison de l'extension de la partie traitant de géométrie (147 problèmes sur 492) que de l'ampleur et de la profondeur de la partie concernant l'algèbre. Cette dernière mériterait presque que l'on attribue au traité le sous-titre de « Livre d'algèbre » : 45 pour cent des problèmes sont résolus grâce à l'algèbre.

Ce traité n'est pas seulement algébrique parce qu'il contient beaucoup d'algèbre (de nombreux problèmes avaient déjà été résolus par voie arithmétique ou algébrique, selon les préférences ou les connaissances des auteurs), mais, surtout, parce qu'il améliore l'algèbre de son temps. Piero classe et résout 61 types d'équations du premier au sixième degré, dont 13 sont toutefois des variantes. Ce grand nombre de types d'équations s'imposait pour les praticiens de l'abaque : face à une question particulière, l'habileté consistait à rechercher, parmi les nombreux exemples étudiés et mémorisés, celui qui s'en rapprochait le plus. De surcroît, les mathématiciens de l'époque travaillaient avec des équations à coef-

ficients positifs : l'algèbre se fondait sur la géométrie, et c'est dans le cadre des longueurs, des surfaces et des volumes qu'étaient interprétés les équations et les coefficients des inconnues. Pour résoudre l'équation $x^2 = 4x$, on cherchait le côté d'un carré dont l'aire était égale à quatre fois ce côté. Aussi ne prenait-on pas en compte les solutions nulles ou négatives, sauf dans des cas très rares.

Pour les équations de degré supérieur à deux, Piero considère des équations rationnelles ou irrationnelles (c'est-à-dire faisant intervenir des racines de l'inconnue) dont le degré pouvait être réduit. Il ne s'agissait pas d'une nouveauté, pas plus que la résolution des équations que l'on nomme aujourd'hui binomiales et biquadratiques (qui ne contiennent que des termes de degré pair). Piero se trompe parfois, mais il obtient quelques résultats intéressants lorsqu'il quitte le contexte traditionnel pour s'aventurer vers d'autres types d'équations telles que $ax^3 = bx + c$, $ax^3 = bx^2 + c$ et $ax^3 = bx^2 + cx + d$. De manière surprenante, Piero les résout comme si elles étaient du second degré, en confondant les termes du second et du troisième degré. Dans la dernière équation, il considère $(cx + d)$ comme un terme

connu et se ramène au cas précédent, conformément à une tradition utile. Malheureusement, toutes les analogies ne fonctionnent pas comme on le souhaiterait.

Des erreurs flagrantes

On peut s'étonner que Piero ait commis des erreurs aussi banales et qu'il n'ait même pas vérifié le résultat obtenu, comme le faisaient les praticiens de l'abaque. C'est d'autant plus étonnant que, dans le *Libellus*, il effectue correctement des calculs compliqués avec des nombres de plus de dix chiffres et que les 140 problèmes qui composent le livre sont correctement posés.

Ce fait confirmerait le caractère expérimental du *Trattato d'abaco*. Piero révèle les domaines qu'il explorait, soit à tâtons, soit avec quelques hypothèses de travail, violant ainsi un critère de l'écriture des traités, selon lequel on ne mettait par écrit que les résultats vérifiés et largement approuvés. On peut supposer, plus prosaïquement, que Piero a copié ces problèmes sans les vérifier, selon une habitude répandue chez les compilateurs de livres d'abaque. Ce soupçon est fondé : dans deux livres d'abaque du XIV^e siècle, on



5. PIERO DELLA FRANCESCA, après avoir traité des cinq polyèdres réguliers (aux faces identiques) et de leurs inclusions réciproques, s'occupe des cinq polyèdres semi-réguliers qu'il obtient en tronquant les premiers. Les polyèdres semi-réguliers ont des arêtes égales et des faces différentes. Le tétraèdre tronqué (à gauche), formé de quatre hexagones et de quatre triangles équilatéraux, est obtenu par division de chaque arête du tétraèdre en trois parties égales ; on fait passer le plan de troncature par les trois points de tripartition les plus proches de chacun des sommets ; on élimine enfin les quatre pointes du tétraèdre ainsi obtenues, qui sont aussi des tétraèdres. Si le même système est appliqué à l'icosaèdre (au milieu),

on obtient autant de pentagones que de sommets de l'icosaèdre (12) et autant d'hexagones que de faces (20), car cinq faces triangulaires conviennent à chaque angle. Il s'agit de l'icosaèdre tronqué, dont la forme est utilisée pour les ballons de football. Piero calcule la surface et le volume de ces polyèdres. Un solide à 72 faces (à droite) repris des dessins de Léonard de Vinci et construit à partir du dodécaèdre de Piero, qui affirme être le premier à en avoir calculé l'aire et le volume. Ce volume présente un intérêt artistique et architectural lié à la conception des coupoles. Ces représentations sont tirées du manuscrit *De divina proportion* de Luca Pacioli, l'élève le plus connu de Piero della Francesca en mathématiques.