

de titre : il a été nommé, *a posteriori*, *Trattato d'abaco*. C'est un texte singulier par rapport aux ouvrages d'abaque habituels, tant en raison de l'extension de la partie traitant de géométrie (147 problèmes sur 492) que de l'ampleur et de la profondeur de la partie concernant l'algèbre. Cette dernière mériterait presque que l'on attribue au traité le sous-titre de «Livre d'algèbre» : 45 pour cent des problèmes sont résolus grâce à l'algèbre.

Ce traité n'est pas seulement algébrique parce qu'il contient beaucoup d'algèbre (de nombreux problèmes avaient déjà été résolus par voie arithmétique ou algébrique, selon les préférences ou les connaissances des auteurs), mais, surtout, parce qu'il améliore l'algèbre de son temps. Piero classe et résout 61 types d'équations du premier au sixième degré, dont 13 sont toutefois des variantes. Ce grand nombre de types d'équations s'imposait pour les praticiens de l'abaque : face à une question particulière, l'habileté consistait à rechercher, parmi les nombreux exemples étudiés et mémorisés, celui qui s'en rapprochait le plus. De surcroît, les mathématiciens de l'époque travaillaient avec des équations à coef-

ficients positifs : l'algèbre se fondait sur la géométrie, et c'est dans le cadre des longueurs, des surfaces et des volumes qu'étaient interprétés les équations et les coefficients des inconnues. Pour résoudre l'équation  $x^2 = 4x$ , on cherchait le côté d'un carré dont l'aire était égale à quatre fois ce côté. Aussi ne prenait-on pas en compte les solutions nulles ou négatives, sauf dans des cas très rares.

Pour les équations de degré supérieur à deux, Piero considère des équations rationnelles ou irrationnelles (c'est-à-dire faisant intervenir des racines de l'inconnue) dont le degré pouvait être réduit. Il ne s'agissait pas d'une nouveauté, pas plus que la résolution des équations que l'on nomme aujourd'hui binomiales et biquadratiques (qui ne contiennent que des termes de degré pair). Piero se trompe parfois, mais il obtient quelques résultats intéressants lorsqu'il quitte le contexte traditionnel pour s'aventurer vers d'autres types d'équations telles que  $ax^3 = bx + c$ ,  $ax^3 = bx^2 + c$  et  $ax^3 = bx^2 + cx + d$ . De manière surprenante, Piero les résout comme si elles étaient du second degré, en confondant les termes du second et du troisième degré. Dans la dernière équation, il considère  $(cx + d)$  comme un terme

connu et se ramène au cas précédent, conformément à une tradition utile. Malheureusement, toutes les analogies ne fonctionnent pas comme on le souhaiterait.

## Des erreurs flagrantes

On peut s'étonner que Piero ait commis des erreurs aussi banales et qu'il n'ait même pas vérifié le résultat obtenu, comme le faisaient les praticiens de l'abaque. C'est d'autant plus étonnant que, dans le *Libellus*, il effectue correctement des calculs compliqués avec des nombres de plus de dix chiffres et que les 140 problèmes qui composent le livre sont correctement posés.

Ce fait confirmerait le caractère expérimental du *Trattato d'abaco*. Piero révèle les domaines qu'il explorait, soit à tâtons, soit avec quelques hypothèses de travail, violant ainsi un critère de l'écriture des traités, selon lequel on ne mettait par écrit que les résultats vérifiés et largement approuvés. On peut supposer, plus prosaïquement, que Piero a copié ces problèmes sans les vérifier, selon une habitude répandue chez les compilateurs de livres d'abaque. Ce soupçon est fondé : dans deux livres d'abaque du XIV<sup>e</sup> siècle, on



5. PIERO DELLA FRANCESCA, après avoir traité des cinq polyèdres réguliers (aux faces identiques) et de leurs inclusions réciproques, s'occupe des cinq polyèdres semi-réguliers qu'il obtient en tronquant les premiers. Les polyèdres semi-réguliers ont des arêtes égales et des faces différentes. Le tétraèdre tronqué (à gauche), formé de quatre hexagones et de quatre triangles équilatéraux, est obtenu par division de chaque arête du tétraèdre en trois parties égales ; on fait passer le plan de troncature par les trois points de tripartition les plus proches de chacun des sommets ; on élimine enfin les quatre pointes du tétraèdre ainsi obtenues, qui sont aussi des tétraèdres. Si le même système est appliqué à l'icosaèdre (au milieu),

on obtient autant de pentagones que de sommets de l'icosaèdre (12) et autant d'hexagones que de faces (20), car cinq faces triangulaires conviennent à chaque angle. Il s'agit de l'icosaèdre tronqué, dont la forme est utilisée pour les ballons de football. Piero calcule la surface et le volume de ces polyèdres. Un solide à 72 faces (à droite) repris des dessins de Léonard de Vinci et construit à partir du dodécaèdre de Piero, qui affirme être le premier à en avoir calculé l'aire et le volume. Ce volume présente un intérêt artistique et architectural lié à la conception des coupoles. Ces représentations sont tirées du manuscrit *De divina proportion* de Luca Pacioli, l'élève le plus connu de Piero della Francesca en mathématiques.

trouve les mêmes problèmes avec les mêmes erreurs.

Le caractère expérimental du *Trattato d'abaco* est toutefois confirmé par la manière dont Piero affronte d'autres équations, du troisième au sixième degré, en proposant des formules de résolution correctes, soit pour une seule équation (il doit en avoir vérifié le résultat), soit pour des équations provenant d'une classe établie de problèmes. En voici un exemple : calculez à combien de deniers par mois est prêtée une lire (une lire vaut 240 deniers) en

sachant que 100 liras donnent 160 liras au terme de quatre années. Le résultat est donné par l'équation :

$$x^4 + 80x^3 + 2\,400x^2 + 32\,000x = 96\,000, \text{ qui est du type :}$$

$$x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x = b$$

(avec  $a = 20$  et  $b = 96\,000$ ), et que l'on peut écrire :

$$(x^2 + 2ax + a^2)^2 = b + a^4.$$

L'équation est correctement résolue par Piero d'une manière que l'on résume aujourd'hui par la formule :

$$x = \sqrt[4]{(a^4 + b)} - a \\ = (\sqrt[4]{256\,000} - 20) \text{ deniers.}$$

On vérifie que la formule de Piero est générale, dans la mesure où elle résout correctement non seulement cette équation, mais toutes celles qui proviennent de la classe de problèmes suivante : calculez à combien de deniers est prêtée une lire par mois en sachant que  $C$  liras, au terme de quatre années, donnent  $M$  liras. En effet, on parvient toujours à l'équation :

$$x^4 + 80x^3 + 2\,400x^2 + 32\,000x = 160\,000\,M/C - 160\,000, \\ \text{résolue par la formule précédente :}$$

## La mathématique en représentation

La récente célébration du 500<sup>e</sup> anniversaire de la mort de Piero della Francesca a remis à l'honneur sa peinture, redécouverte depuis le XIX<sup>e</sup> siècle, et ses travaux en mathématiques. Le temps est venu de renverser les termes habituels de la critique, qui signale que ce peintre était aussi géomètre à ses heures, en relevant que la grande originalité de ce mathématicien est qu'il était peintre.

Les recueils modernes réunissant l'œuvre graphique de Piero négligent les figures de ses traités de mathématiques, ouvrages qu'il a pourtant soigneusement illustrés. L'intérêt de Piero pour les mathématiques est indissociable de son indéniable génie pictural. Les planches de ses traités ne comportent pas que des tracés de géométrie pratique : ils recèlent un catalogue des modèles idéaux et architecturaux que les peintres et autres praticiens des arts du trait et du dessin ne manquèrent pas d'exploiter. Les manuscrits de Piero ont été lus : l'usure des nombreuses copies de son traité de perspective l'atteste. En outre, en 1568, Daniele Barbaro en a repris de nombreux extraits dans son propre traité de perspective. Une partie du *Libellus de quinque corporibus regularibus* de Piero a été reprise par Luca Pacioli, élève de Piero, dans le traité *De divina proportionem*, illustré en partie par Léonard de Vinci et imprimé à Venise en 1509. Pacioli a aussi repris, dans un autre traité, de nombreux résultats du traité d'abaque de Piero. L'influence de ce dernier s'est même étendue à son illustre homologue allemand Albrecht Dürer, auteur, lui aussi, d'une géométrie pratique, imprimée à Nuremberg en 1525.

*De prospectiva Pingendi*, le traité de perspective de Piero della Francesca, a été rédigé dans les années 1470 à 1480. Il fut retrouvé seulement au XIX<sup>e</sup> siècle et imprimé pour la première fois en 1899. La première mention officielle de l'existence de ce traité est due aux mathématiciens Jean-Victor Poncelet et Michel Chasles qui, dans un rapport présenté le 12 décembre 1853 à l'Académie des sciences, s'exprimaient en ces termes : « Piero della Francesca, appelé aussi Pietro dal Borgo San Sepolcro, du nom de sa ville natale, excellent peintre du XV<sup>e</sup> siècle, qui passait aussi pour le plus savant géomètre de l'époque est regardé comme le principal promoteur de la perspective linéaire. »

Ce traité manuscrit est le premier à expliciter la construction dite « légitime » de Filippo Brunelleschi, fondée sur une double projection orthogonale (plan et profil), et à valider géométriquement la méthode de Leo Battista Alberti, premier énoncé connu d'une règle pour la perspective centrale, abrégée de celle de Brunelleschi. On peut de surcroît attribuer à Piero della Francesca plusieurs résultats novateurs. Il établit la loi numérique générale du raccourcissement des distances dans la perspective centrale. Le géomètre Girard Desargues (1591-1661) en donnera la formulation générale en imaginant le concept d'involution, connu aujourd'hui sous la forme du birapport ou rapport anharmonique : il montre la conservation du rapport des rapports de distances par projection centrale. Piero réalise la première description de l'utilisation du point de distance comme point de construction (le point de distance est un point de fuite secondaire vers lequel convergent des diagonales) et les premières constructions, en peinture, de projections centrales sur des plans horizontaux, théorisant ainsi le trompe-l'œil d'ornement, gisant (au sol ou sur un table) ou plafonnant. Cette dernière innovation contient en germe les principes du trompe-l'œil architectural, du décor plafonnant monumental en trompe-l'œil, de l'ombre portée, du décor de théâtre illusionniste et de l'anamorphose plane. Ces innovations conduiront à l'émergence de la géométrie projective au XIX<sup>e</sup> siècle.

Piero della Francesca est le premier, dans l'histoire de la géométrie et *a fortiori* du dessin scientifique et technique, à proposer des représentations réglées et reproductibles des solides de l'espace, tant en perspective cavalière qu'en perspective centrale. De ce point de vue, il y a un « avant Piero », où la reproduction est improbable, et un « après Piero » qui s'est traduit, dans l'histoire des sciences et des techniques, par la reproductibilité des entreprises humaines, avec pour horizon la possibilité de la production en série. L'avènement de la science rationnelle et l'émergence du monde industriel en Occident sont passés par l'invention de la perspective centrale et de ses avatars, la perspective cavalière et le dessin technique.

Jean-Pierre LE GOFF, IUFM et IREM de Caen.