

trouve les mêmes problèmes avec les mêmes erreurs.

Le caractère expérimental du *Trattato d'abaco* est toutefois confirmé par la manière dont Piero affronte d'autres équations, du troisième au sixième degré, en proposant des formules de résolution correctes, soit pour une seule équation (il doit en avoir vérifié le résultat), soit pour des équations provenant d'une classe établie de problèmes. En voici un exemple : calculez à combien de deniers par mois est prêtée une lire (une lire vaut 240 deniers) en

sachant que 100 liras donnent 160 liras au terme de quatre années. Le résultat est donné par l'équation :

$$x^4 + 80x^3 + 2\,400x^2 + 32\,000x = 96\,000, \text{ qui est du type :}$$

$$x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x = b$$

(avec  $a = 20$  et  $b = 96\,000$ ), et que l'on peut écrire :

$$(x^2 + 2ax + a^2)^2 = b + a^4.$$

L'équation est correctement résolue par Piero d'une manière que l'on résume aujourd'hui par la formule :

$$x = \sqrt[4]{(a^4 + b)} - a \\ = (\sqrt[4]{256\,000} - 20) \text{ deniers.}$$

On vérifie que la formule de Piero est générale, dans la mesure où elle résout correctement non seulement cette équation, mais toutes celles qui proviennent de la classe de problèmes suivante : calculez à combien de deniers est prêtée une lire par mois en sachant que  $C$  liras, au terme de quatre années, donnent  $M$  liras. En effet, on parvient toujours à l'équation :

$$x^4 + 80x^3 + 2\,400x^2 + 32\,000x = 160\,000\,M/C - 160\,000, \\ \text{résolue par la formule précédente :}$$

## La mathématique en représentation

La récente célébration du 500<sup>e</sup> anniversaire de la mort de Piero della Francesca a remis à l'honneur sa peinture, redécouverte depuis le XIX<sup>e</sup> siècle, et ses travaux en mathématiques. Le temps est venu de renverser les termes habituels de la critique, qui signale que ce peintre était aussi géomètre à ses heures, en relevant que la grande originalité de ce mathématicien est qu'il était peintre.

Les recueils modernes réunissant l'œuvre graphique de Piero négligent les figures de ses traités de mathématiques, ouvrages qu'il a pourtant soigneusement illustrés. L'intérêt de Piero pour les mathématiques est indissociable de son indéniable génie pictural. Les planches de ses traités ne comportent pas que des tracés de géométrie pratique : ils recèlent un catalogue des modèles idéaux et architecturaux que les peintres et autres praticiens des arts du trait et du dessin ne manquèrent pas d'exploiter. Les manuscrits de Piero ont été lus : l'usure des nombreuses copies de son traité de perspective l'atteste. En outre, en 1568, Daniele Barbaro en a repris de nombreux extraits dans son propre traité de perspective. Une partie du *Libellus de quinque corporibus regularibus* de Piero a été reprise par Luca Pacioli, élève de Piero, dans le traité *De divina proportionem*, illustré en partie par Léonard de Vinci et imprimé à Venise en 1509. Pacioli a aussi repris, dans un autre traité, de nombreux résultats du traité d'abaque de Piero. L'influence de ce dernier s'est même étendue à son illustre homologue allemand Albrecht Dürer, auteur, lui aussi, d'une géométrie pratique, imprimée à Nuremberg en 1525.

*De prospectiva Pingendi*, le traité de perspective de Piero della Francesca, a été rédigé dans les années 1470 à 1480. Il fut retrouvé seulement au XIX<sup>e</sup> siècle et imprimé pour la première fois en 1899. La première mention officielle de l'existence de ce traité est due aux mathématiciens Jean-Victor Poncelet et Michel Chasles qui, dans un rapport présenté le 12 décembre 1853 à l'Académie des sciences, s'exprimaient en ces termes : « Pietro della Francesca, appelé aussi Pietro dal Borgo San Sepolcro, du nom de sa ville natale, excellent peintre du XV<sup>e</sup> siècle, qui passait aussi pour le plus savant géomètre de l'époque est regardé comme le principal promoteur de la perspective linéaire. »

Ce traité manuscrit est le premier à expliciter la construction dite « légitime » de Filippo Brunelleschi, fondée sur une double projection orthogonale (plan et profil), et à valider géométriquement la méthode de Leo Battista Alberti, premier énoncé connu d'une règle pour la perspective centrale, abrégée de celle de Brunelleschi. On peut de surcroît attribuer à Piero della Francesca plusieurs résultats novateurs. Il établit la loi numérique générale du raccourcissement des distances dans la perspective centrale. Le géomètre Girard Desargues (1591-1661) en donnera la formulation générale en imaginant le concept d'involution, connu aujourd'hui sous la forme du birapport ou rapport anharmonique : il montre la conservation du rapport des rapports de distances par projection centrale. Piero réalise la première description de l'utilisation du point de distance comme point de construction (le point de distance est un point de fuite secondaire vers lequel convergent des diagonales) et les premières constructions, en peinture, de projections centrales sur des plans horizontaux, théorisant ainsi le trompe-l'œil d'ornement, gisant (au sol ou sur un table) ou plafonnant. Cette dernière innovation contient en germe les principes du trompe-l'œil architectural, du décor plafonnant monumental en trompe-l'œil, de l'ombre portée, du décor de théâtre illusionniste et de l'anamorphose plane. Ces innovations conduiront à l'émergence de la géométrie projective au XIX<sup>e</sup> siècle.

Piero della Francesca est le premier, dans l'histoire de la géométrie et *a fortiori* du dessin scientifique et technique, à proposer des représentations réglées et reproductibles des solides de l'espace, tant en perspective cavalière qu'en perspective centrale. De ce point de vue, il y a un « avant Piero », où la reproduction est improbable, et un « après Piero » qui s'est traduit, dans l'histoire des sciences et des techniques, par la reproductibilité des entreprises humaines, avec pour horizon la possibilité de la production en série. L'avènement de la science rationnelle et l'émergence du monde industriel en Occident sont passés par l'invention de la perspective centrale et de ses avatars, la perspective cavalière et le dessin technique.

Jean-Pierre LE GOFF, IUFM et IREM de Caen.

**6. VUE CAVALIÈRE DE L'ICOSAÈDRE** inclus dans le cube, tirée du *Libellus de quinque corporibus regularibus* (Petit livre à propos des cinq corps réguliers) de Piero della Francesca. Le dessin est autographe, le texte d'un copiste inconnu. Piero explique minutieusement comment chacune des six faces du cube contient une arête de l'icosaèdre placée en situation médiane. Cette construction n'est pas dans le livre xv des *Éléments* d'Euclide (écrit en réalité bien après Euclide), et il est probable que Piero souhaite en souligner l'originalité : elle montre en particulier que six des arêtes de l'icosaèdre, bien choisies, sont orthogonales deux à deux. Piero della Francesca est le premier à fournir une visualisation de polyèdres en trois dimensions.

$$x = (\sqrt[4]{160\,000\,M/C} - 20) \text{ deniers.}$$

Cette généralisation n'est toutefois pas donnée par Piero. Au contraire, la formule est faussement présentée comme la résolution de l'équation générale  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = e$  (avec des coefficients quelconques), et le problème financier apparaît comme un simple exemple de sa validité. Il n'en reste pas moins qu'il a réussi à résoudre une équation particulière du quatrième degré, ainsi que d'autres du troisième et du cinquième degré qui peuvent être obtenues à partir du même problème si l'on applique la durée de trois et de cinq années. Certaines de ces formules ne se trouvent que dans les ouvrages de Piero et peuvent donc lui être attribuées. La découverte peu après, par d'autres mathématiciens, de la formule de résolution des équations du troisième degré vient sans doute de cette habileté dans la manipulation des coefficients, dont Piero a accéléré la mise en place, et de l'encouragement fourni par de tels succès partiels.



La notation algébrique utilisée par Piero est aussi originale ; on la retrouve, avec quelques variantes, chez plusieurs autres mathématiciens de l'époque, mais elle a rapidement disparu, ne laissant derrière elle qu'une trace de l'intérêt intense pour l'algèbre. Tout cela confirme la participation active de Piero au débat algébrique de la seconde moitié du XV<sup>e</sup> siècle.

Piero della Francesca, peintre mathématicien, a été l'un des premiers techniciens qui surent devenir des scientifiques. Ce phénomène, conjointement avec l'intérêt des scientifiques pour les techniques, a été décisif dans la «révolution scientifique» de la Renaissance.

Enrico GAMBA est professeur d'histoire des mathématiques à l'Université catholique de Brescia. Vico MONTEBELLI est professeur de mathématiques appliquées.

Davis M. DALY, *Piero della Francesca's Mathematical Treatises*, Longo, Ravenna, 1977.  
G.C. ARGAN et R. WITTKOWER, *Perspective et histoire au Quattrocento*, Éditions de la Passion, Paris 1990.

J.-P. LE GOFF, *Aux confins de l'art et de la science : le De prospectiva pingendi de Piero della Francesca*, in : D. Bessot, Y. Hellegouarch et J.-P. Le Goff (éditeurs), *Destin de l'art, desseins de la science*, Actes du colloque ADERHEM de Caen (octobre 1986) diffusion IREM de Basse-Normandie, Caen 1991.

P. COLMAR, *La perspective en jeu*, Éditions Gallimard, Paris, 1992.

D. BESSOT et J.-P. LE GOFF, *Mais où est donc passée la troisième dimension ?*, in *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, Éditions Ellipses, Paris, 1993.

Piero della FRANCESCA, *Libellus de quinque corporibus regularibus*, Edizione nazionale, Giunti, Florence, 1995.

*Les mathématiciens*, Bibliothèque Pour la Science, 1996.

Thomas BANCHOFF, *La quatrième dimension*, collection Univers des sciences, Pour la Science, 1996.