

Les nombres-univers

JEAN-PAUL DELAHAYE

Votre photographie est dans la suite des puissances de 2.

La Bibliothèque de Babel est peut-être la plus merveilleuse nouvelle de littérature fantastique jamais écrite : Jorge Luis Borges y émet l'hypothèse que le monde est une immense bibliothèque dont les salles de lecture contiennent tous les livres possibles de 420 pages. Chaque page comporte 40 lignes de 80 caractères pris dans un alphabet de 25 symboles : 22 lettres, le blanc, le point et la virgule (on serait plus à l'aise en acceptant, comme en informatique, 128 ou 256 caractères différents, mais c'est sans grande importance).

Les habitants de ce monde-bibliothèque sont conscients que le nombre total des ouvrages différents d'une telle bibliothèque est fini. Il y a $25^{420 \times 40 \times 80} = 25^{1344000} = 2,35 \times 10^{1878831}$ ouvrages distincts. Les habitants doivent donc se résoudre à admettre soit que la bibliothèque est elle-même finie (aucun livre n'étant présent deux fois), soit qu'elle est infinie, mais alors elle comporte plusieurs fois les mêmes ouvrages, peut-être répétés périodiquement (c'est la théorie soutenue par le narrateur).

Tentons d'imaginer ce que signifie cette idée d'une bibliothèque incluant tous les ouvrages possibles de 420 pages. Elle contiendrait le livre composé uniquement de la lettre A imprimée 1 344 000 fois, celui composé de la suite EFGHIJ indéfiniment recopiée (un autre n'en différerait qu'à la page 100 où le J disparaîtrait). Elle contiendrait aussi le texte du prochain prix Goncourt, le texte du prochain prix Goncourt dont la dernière page a été remplacée par une page blanche, une autre version encore avec chaque 'i' remplacé par 'y', une autre version avec votre nom comme nom d'auteur, une autre avec votre nom comme nom du personnage principal, les traductions italienne, bulgare, en vieux français, en latin primitif, etc. Cette bibliothèque contiendrait aussi un livre dont les pages paires porteraient le texte de l'Évangile, et les pages impaires de

la Justine de Sade ; un livre qui serait Fictions de Borges (le recueil qui contient la nouvelle que nous examinons) écrit à l'envers, un autre qui serait Fictions comme je pourrais essayer de le reconstituer de mémoire si je m'y essayais ; un autre qui serait Fictions dont les mots auraient été classés par ordre alphabétique ; un autre qui serait Fictions sans la lettre 'e' résultant de l'exercice d'un Georges Pérec ressuscité. Il y aurait aussi, bien sûr, un livre qui énumérerait les décimales de π écrites en toutes lettres tout au long des 420 pages, mais malheureusement il y aurait aussi le même avec une erreur en page 200, et le même avec une erreur toutes les pages, et le même avec une erreur par ligne. Il y aurait aussi un livre qui raconterait votre vie, mais un autre la prolongerait de dix ans, et un autre la raccourcirait de 15 ans. J'arrête là, car la liste des possibilités est infinie... Non... Elle est finie, mais le fini très grand ne ressemble-t-il pas à l'infini ?

On pourrait réécrire la nouvelle de Borges en imaginant une filmothèque où seraient entreposés tous les films possibles enregistrés sur des disques optiques numériques (chaque disque ne comporte qu'un nombre déterminé d'informations, et le nombre de disques différents est fini). Cette filmothèque universelle contiendrait quelque part le journal télévisé de demain soir, le film des derniers instants d'Hitler, l'enregistrement sur le vif des cours que donnait Aristote il y a 2 000 ans, un résumé en une heure des 50 prochaines années de la vie sur Terre, mais aussi une multitude de films fallacieux, mal montés, incohérents, indéchiffrables, parasités ou presque entièrement noirs.

Le nombre de combinaisons de M symboles pris dans un alphabet fini de N symboles (en acceptant les répétitions) est fini : c'est N^M , car il y a N possibilités pour le premier symbole, autant pour le second, et ainsi de suite jusqu'au dernier symbole, ce qui fait en tout

$N \times N \times \dots \times N$ (M fois) combinaisons. La richesse d'un tel ensemble laisse froid le mathématicien, alors que le physicien, lui, se rend compte que certains nombres trop grands, comme celui des livres de la Bibliothèque de Babel, sont irréels. Le volume de l'Univers visible est d'environ 15 milliards d'années-lumière au cube, soit :

$$(15 \times 300\,000 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 \times 100\,000)^3 \text{ cm}^3 = 2,85 \times 10^{57} \text{ cm}^3.$$

On est loin des $2,35 \times 10^{1878831}$ ouvrages du monde-bibliothèque de Borges, et donc, même si nous réussissions à remplir de livres tout l'espace à raison d'un livre par centimètre cube, l'Univers visible entier ne contiendrait qu'une infinitésimale partie de la Bibliothèque de Babel ou de la filmothèque universelle. Les nombres trop grands n'ont pas de sens physique, et peut-être pas de sens du tout.

LES SUITES-UNIVERS

Le mathématicien est plus intéressé par l'infini que par les nombres grands, mais finis (on peut penser que cette facilité sera un jour remise en question). Le mathématicien n'éprouve, par exemple, aucune difficulté à imaginer la suite des nombres entiers écrits en base dix : 0 1 2 3 ... 10 11 12 ... 99 100 101 ... Il peut la manipuler en pensée sans mal. Réalise-t-il cependant que, dans cette suite de symboles, il y a tout l'univers des livres ou films possibles que nous envisageons au-dessus, et bien plus ?

Convenons de regrouper deux par deux les chiffres et d'associer à chaque couple de chiffres un symbole pris dans un ensemble de 100 caractères (ce qui est suffisant pour obtenir une assez belle typographie et mieux que les 25 caractères de Borges). Alors, quelque part dans la suite, il y aura la séquence des chiffres correspondant au texte du prochain prix Goncourt, autre part celle du roman de votre vie, etc. Les images et le son d'un disque optique sont codés par une suite finie de chiffres, et donc, dans la suite des nombres entiers mis bout à bout, il y a quelque part le codage du film du sacre de Napoléon du 2 décembre 1804, celui du film de votre première journée d'école, etc.

Nous appellerons suite-univers toute suite de chiffres qui possède la propriété que toute séquence finie de chiffres y est présente au moins une fois. C'est le cas de la suite de chiffres 12345678910111213... (la suite des chiffres des entiers écrits en base dix les uns derrière les autres), car, par exemple, on trouve la séquence 5365 quand on arrive au nombre 5 365 (en fait, on la trouve déjà avant quand on passe

de 653 à 654). Par définition, les suites-univers contiennent donc tout livre possible, tout film possible, toute vie humaine possible, toute musique possible... tout l'Univers.

Bien que cela soit moins évident que pour l'énumération des entiers, la suite des puissances de 2 écrites en base 10 les unes après les autres (2 4 8 16 32 64 128, etc.) est aussi une suite-univers. Un théorème énonce que, pour toute séquence de chiffres $c_1 c_2 \dots c_n$, il existe une certaine puissance de 2 dont l'écriture décimale commence par $c_1 c_2 \dots c_n$. On connaît même un programme de cinq lignes (dû à Stephan Heilmayr et écrit dans le langage *Mathematica*) qui vous donne l'exposant de 2 voulu quand vous lui donnez la séquence.

Laissons-nous encore aller à imaginer ce que cela implique : il existe un entier n tel que le début des chiffres de 2^n en base 10 code le texte de la description sur 420 pages de votre visage en train de tirer la langue ; il y a aussi le texte des cinq milliards de bases AGCT correspondant à votre génome ; il y a aussi les données informatiques permettant de faire revivre la vie de Vercingétorix du début à la fin dans un appareil de réalité virtuelle : vous mettez le casque sur la tête, vous vous attachez sur l'armature du simulateur, et vous voilà projeté en arrière dans le temps. Et c'est vrai aussi de toutes les autres vies humaines passées ou futures qui se trouvent là, dispersées au fil des décimales des puissances de 2.

LES NOMBRES-UNIVERS

Convenons d'appeler nombre-univers un nombre dont la suite des décimales est une suite-univers. Existe-t-il beaucoup de nombres-univers ?

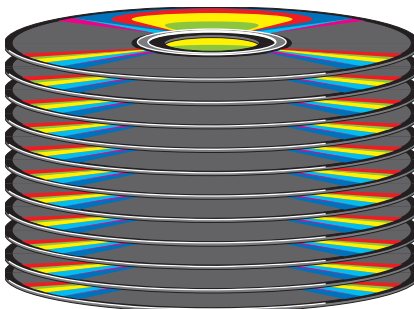
On sait qu'un nombre réel rapport de deux entiers (comme $2/3$, $150/235$, etc.) a une suite de décimales qui n'est pas une suite-univers, car périodique : quand on fait la division, on retombe, à un moment ou un autre, sur un reste obtenu précédemment, et donc tout recommence.

Pour les nombres non rapport de deux entiers – on dit irrationnels –, comme $\sqrt{2}$, π , e , personne ne sait si ce sont des nombres-univers. On ne sait d'ailleurs même pas si π , à partir d'un certain rang, s'écrit sans utiliser de '0' (ou sans '1', ou sans '2', etc.) : on juge que c'est improbable (que peut vouloir dire «improbable» dans un tel cas?), mais rien n'est démontré. On pense en général que π est un nombre-univers, et j'ai d'ailleurs trouvé sur *Internet* à l'adresse suivante :

<http://gryphon.ccs.brandeis/~grath/attractions/gpi/>



1. Borges avait imaginé la bibliothèque de Babel contenant tous les livres de 420 pages : un de ces livres contient l'histoire de votre vie. On peut souhaiter qu'une partie (infime) de cette bibliothèque soit réunie dans celle de l'abbaye d'Admont, en Autriche.



2. Un disque optique comporte environ 5 000 000 000 de bits d'information. Il n'y a donc qu'un nombre fini de disques optiques différents possibles ($2^{5\,000\,000\,000}$). On peut alors imaginer, comme Borges le propose avec sa bibliothèque de Babel, une filmothèque universelle réunissant tous les disques optiques possibles. Tout film passé ou futur se trouve dans la filmothèque.

SUITE-UNIVERS DES PUISSANCES DE 2

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
2048	4096	8192	16384	32768	65536					
131072	262144	524288								

NOMBRE-UNIVERS DE LA SUITE DES ENTIERS

0,1234567891011121314151617181920
21222324252627282930313233343536
373839404142434445464748

3. Les suites-univers. Une suite-univers est, par définition, une suite qui contient toute séquence finie. La suite des puissances de 2 en base 10 est une suite-univers : toute séquence s'y trouve, tout comme dans la suite des décimales du nombre-univers. Quelque part il y a votre date de naissance, ailleurs il y a la version numérique du film de vos épreuves orales de baccalauréat, etc.



4. L'infinité des mondes et l'infinité de vos jumeaux. Si (1) l'Univers est infini, (2) il y a une infinité de galaxies et (3) il existe un principe qui fait que chaque combinaison de particules élémentaires se présente avec une probabilité non nulle dans une galaxie, alors toute combinaison de particules élémentaires est réalisée une infinité de fois dans l'Univers. Et donc il y a une infinité de personnes parfaitement semblables à vous en train de lire ce numéro de *Pour La Science*. Ce problème «de la duplication» gêne certains cosmologistes.