

de 653 à 654). Par définition, les suites-univers contiennent donc tout livre possible, tout film possible, toute vie humaine possible, toute musique possible... tout l'Univers.

Bien que cela soit moins évident que pour l'énumération des entiers, la suite des puissances de 2 écrites en base 10 les unes après les autres (2 4 8 16 32 64 128, etc.) est aussi une suite-univers. Un théorème énonce que, pour toute séquence de chiffres $c_1 c_2 \dots c_n$, il existe une certaine puissance de 2 dont l'écriture décimale commence par $c_1 c_2 \dots c_n$. On connaît même un programme de cinq lignes (dû à Stephan Heilmayr et écrit dans le langage *Mathematica*) qui vous donne l'exposant de 2 voulu quand vous lui donnez la séquence.

Laissons-nous encore aller à imaginer ce que cela implique : il existe un entier n tel que le début des chiffres de 2^n en base 10 code le texte de la description sur 420 pages de votre visage en train de tirer la langue ; il y a aussi le texte des cinq milliards de bases AGCT correspondant à votre génome ; il y a aussi les données informatiques permettant de faire revivre la vie de Vercingétorix du début à la fin dans un appareil de réalité virtuelle : vous mettez le casque sur la tête, vous vous attachez sur l'armature du simulateur, et vous voilà projeté en arrière dans le temps. Et c'est vrai aussi de toutes les autres vies humaines passées ou futures qui se trouvent là, dispersées au fil des décimales des puissances de 2.

LES NOMBRES-UNIVERS

Convenons d'appeler nombre-univers un nombre dont la suite des décimales est une suite-univers. Existe-t-il beaucoup de nombres-univers ?

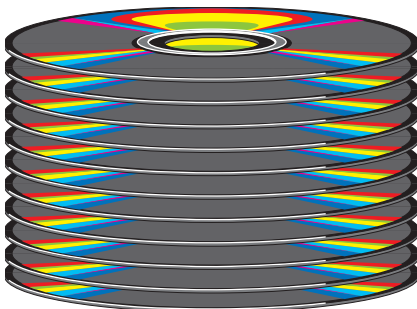
On sait qu'un nombre réel rapport de deux entiers (comme $2/3$, $150/235$, etc.) a une suite de décimales qui n'est pas une suite-univers, car périodique : quand on fait la division, on retombe, à un moment ou un autre, sur un reste obtenu précédemment, et donc tout recommence.

Pour les nombres non rapport de deux entiers – on dit irrationnels –, comme $\sqrt{2}$, π , e , personne ne sait si ce sont des nombres-univers. On ne sait d'ailleurs même pas si π , à partir d'un certain rang, s'écrit sans utiliser de '0' (ou sans '1', ou sans '2', etc.) : on juge que c'est improbable (que peut vouloir dire «improbable» dans un tel cas ?), mais rien n'est démontré. On pense en général que π est un nombre-univers, et j'ai d'ailleurs trouvé sur *Internet* à l'adresse suivante :

<http://gryphon.ccs.brandeis/~grath/attractions/gpi/>



1. Borges avait imaginé la bibliothèque de Babel contenant tous les livres de 420 pages : un de ces livres contient l'histoire de votre vie. On peut souhaiter qu'une partie (infime) de cette bibliothèque soit réunie dans celle de l'abbaye d'Admont, en Autriche.



2. Un disque optique comporte environ 5 000 000 000 de bits d'information. Il n'y a donc qu'un nombre fini de disques optiques différents possibles ($2^{5\,000\,000\,000}$). On peut alors imaginer, comme Borges le propose avec sa bibliothèque de Babel, une filmothèque universelle réunissant tous les disques optiques possibles. Tout film passé ou futur se trouve dans la filmothèque.

SUITE-UNIVERS DES PUISSANCES DE 2

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
2048	4096	8192	16384	32768	65536					
131072	262144	524288								

NOMBRE-UNIVERS DE LA SUITE DES ENTIERS

0,1234567891011121314151617181920
21222324252627282930313233343536
373839404142434445464748

3. Les suites-univers. Une suite-univers est, par définition, une suite qui contient toute séquence finie. La suite des puissances de 2 en base 10 est une suite-univers : toute séquence s'y trouve, tout comme dans la suite des décimales du nombre-univers. Quelque part il y a votre date de naissance, ailleurs il y a la version numérique du film de vos épreuves orales de baccalauréat, etc.



4. L'infinité des mondes et l'infinité de vos jumeaux. Si (1) l'Univers est infini, (2) il y a une infinité de galaxies et (3) il existe un principe qui fait que chaque combinaison de particules élémentaires se présente avec une probabilité non nulle dans une galaxie, alors toute combinaison de particules élémentaires est réalisée une infinité de fois dans l'Univers. Et donc il y a une infinité de personnes parfaitement semblables à vous en train de lire ce numéro de *Pour La Science*. Ce problème «de la duplication» gêne certains cosmologistes.

5. Les nombres-univers sont très nombreux

Non seulement il existe des nombres-univers, mais, en réalité, ils sont très nombreux. En voici la preuve en deux étapes.

(a) Il y a une infinité non dénombrable de suites de Pile ou Face (version binaire du principe de diagonalisation de Cantor). Supposons qu'on puisse associer, sans répétition et sans en oublier, un nombre entier à chaque suite de Pile ou Face, par exemple :

```
0 → P P F F P P...
1 → F F P F P P...
2 → F P P F P P...
...
```

La suite obtenue en prenant la diagonale et en échangeant P et F n'est pas dans cette liste (car elle diffère par son premier élément de la première suite, par son deuxième élément de la deuxième liste, etc.). Il est donc impossible de numéroter les suites infinies de P et de F par des entiers : l'infini des suites de Pile ou Face est donc strictement plus grand que l'infini des entiers. On dit : il y a une infinité non dénombrable de suites de Pile ou Face.

(b) Il y a une infinité non dénombrable de nombres-univers. On part du nombre-univers 0,1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11... On prend une suite infinie de PF quelconque. On permute '1' et '2' si le premier élément est P ; sinon, on ne permute pas. On permute '3' et '4' si le second élément est P, etc. Par ce procédé, deux suites de Pile ou Face différentes donneront deux nombres-univers différents. Il y a donc une infinité non dénombrable (plus grande que celle des entiers) de nombres-univers différents.

un programme qui recherche pour vous si votre date de naissance ou toute séquence qui vous intéresse est dans les décimales de π . J'ai ainsi appris qu'une suite de sept 7, soit 7777777, se trouvait dans π à partir de la décimale 3 346 229.

L'ignorance dans laquelle nous sommes pour $\sqrt{2}$, π , e est en partie compensée par l'élaboration de nombres irrationnels et même transcendants (non solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers) qui sont des nombres-univers, ou au contraire ne le sont pas. Le nombre 0,101001000001... ($n!$ fois le '0' entre deux '1') est transcendant, mais n'est pas un nombre-univers. Le nombre 0,1020030000004... ($n!$ fois le '0' entre l'écriture décimale de n et de $n + 1$) est un nombre-univers transcendant.

Notons que les nombres incompressibles, c'est-à-dire que l'on ne peut coder sous une forme plus concise, sont tous des nombres-univers. Si un nombre, 47 par exemple, manque dans un nombre A , alors ce nombre A peut être codé plus économiquement en évitant le signe 47, en remplaçant 48 par 47, 49 par 48, etc. La suite ne comporte plus 99, et l'on peut écrire le nombre A en base 99, ce qui donne une séquence de chiffres un peu plus courte. Un nombre qui n'est pas un nombre-univers est donc compressible, ce qui, dit autrement, signifie : tout nombre incompressible est un nombre-univers. On démontre qu'il y a une infi-

nité de nombres incompressibles, donc de nombres-univers.

Un moyen simple et direct de construire une infinité non dénombrable (plus grande que l'infini des entiers) de nombres-univers est indiqué sur la figure 5.

L'INFINI ET LES POSSIBLES

J'ai lu, il y a quelques mois, la remarque suivante qui semble être en rapport avec ce que nous examinons ici : «S'il existe un nombre infini de galaxies, toutes les combinaisons possibles présidant à la naissance et à l'existence d'un être vivant doivent se produire un nombre infini de fois : il existe non seulement une infinité de mondes, mais aussi une infinité d'individus ayant la même structure que n'importe quel individu de notre Terre : vous ou moi.»

Vous avez remarqué, j'imagine, que ce raisonnement est faux. L'infini autorise certains délires, et nous nous y sommes laissés aller avec nos énumérations de tout à l'heure, mais il n'autorise pas à dire n'importe quoi. C'est à G. Cantor que nous devons la démonstration qu'il existe une science rigoureuse de l'infini, dont les mathématiciens découvrent les lois, et qui permet d'affirmer à propos de l'infini certaines choses et en interdit d'autres. L'auteur des lignes citées pense, semble-t-il, que dès qu'un

ensemble est infini alors tout est dedans, et même que tout y est inclus une infinité de fois. C'est clairement inexact : l'ensemble des nombres s'écrivant avec les chiffres pairs 0, 2, 4, 6, 8 par exemple est infini et pourtant il ne contient pas tous les nombres, puisque 3 n'y est pas, ni 123, ni 25267!

Même si tout infini est grand (par nature!), tout infini n'est pas tout!!!

Malheureusement pour notre goût de l'éternité et notre souhait qu'il y ait d'autres formes de vie dans l'Univers : même s'il existe un nombre infini de galaxies, il se peut que la vie ne soit apparue qu'une fois, et qu'il n'y ait nulle part ailleurs un individu possédant la même structure que vous ou moi.

Il existe cependant un résultat de la théorie des probabilités qui explique peut-être l'erreur mentionnée. Si l'on tire au sort indéfiniment des chiffres, chaque chiffre ayant une probabilité non nulle d'être obtenu (par exemple 1/10) alors la suite infinie construite ainsi est, avec une probabilité 1, une suite-univers et donc toute suite finie de nombres se présentera si l'on sait attendre assez longtemps.

On affirme parfois qu'un singe tapant au hasard sur une machine à écrire finit à un moment ou un autre par écrire *Le songe d'une nuit d'été* de Shakespeare ou l'encyclopédie *Larousse* en 20 volumes. Si on prend la précaution de préciser que les choix du singe suivent une loi de probabilité qui n'omet aucune touche de la machine, c'est tout à fait exact d'après le résultat cité (*voir un raisonnement direct sur la figure 6*).

On peut aussi tirer du résultat probabiliste mentionné que si l'Univers est infini, qu'il comporte une infinité de galaxies et que les particules élémentaires à l'intérieur de chaque galaxie occupent une configuration (parmi un nombre de configurations possibles qu'on suppose fini) en respectant une loi de probabilité qui n'attribue une probabilité nulle à aucune configuration (ce qui n'est pas invraisemblable si l'Univers mélange bien tout), alors il est vrai maintenant que «toutes les combinaisons possibles présidant à la naissance et à l'existence d'un être vivant doivent se produire un nombre infini de fois : il existe non seulement une infinité de mondes, mais aussi une infinité d'individus ayant la même structure que n'importe quel individu de notre Terre : vous ou moi».

Perspectives troublantes! Certains cosmologistes comme John Barrow et Franck Tipler n'hésitent pas à les évoquer et à s'interroger sur ce qu'ils dénomment le «problème de la duplication», dont ils remarquent malicieusement que, s'il se pose vraiment, alors ils ne sont certainement pas les seuls à s'y intéresser.