

5. Les nombres-univers sont très nombreux

Non seulement il existe des nombres-univers, mais, en réalité, ils sont très nombreux. En voici la preuve en deux étapes.

(a) Il y a une infinité non dénombrable de suites de Pile ou Face (version binaire du principe de diagonalisation de Cantor). Supposons qu'on puisse associer, sans répétition et sans en oublier, un nombre entier à chaque suite de Pile ou Face, par exemple :

0 → P P F F P P...
 1 → F P F F P P...
 2 → F P P F F P...
 ...

La suite obtenue en prenant la diagonale et en échangeant P et F n'est pas dans cette liste (car elle diffère par son premier élément de la première suite, par son deuxième élément de la deuxième liste, etc.). Il est donc impossible de numérotter les suites infinies de P et de F par des entiers : l'infini des suites de Pile ou Face est donc strictement plus grand que l'infini des entiers. On dit : il y a une infinité non dénombrable de suites de Pile ou Face.

(b) Il y a une infinité non dénombrable de nombres-univers. On part du nombre-univers 0,1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11... On prend une suite infinie de PF quelconque. On permute '1' et '2' si le premier élément est P ; sinon, on ne permute pas. On permute '3' et '4' si le second élément est P, etc. Par ce procédé, deux suites de Pile ou Face différentes donneront deux nombres-univers différents. Il y a donc une infinité non dénombrable (plus grande que celle des entiers) de nombres-univers différents.

un programme qui recherche pour vous si votre date de naissance ou toute séquence qui vous intéresse est dans les décimales de π . J'ai ainsi appris qu'une suite de sept 7, soit 7777777, se trouvait dans π à partir de la décimale 3 346 229.

L'ignorance dans laquelle nous sommes pour $\sqrt{2}$, π , e est en partie compensée par l'élaboration de nombres irrationnels et même transcendants (non solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers) qui sont des nombres-univers, ou au contraire ne le sont pas. Le nombre 0,101001000001... ($n!$ fois le '0' entre deux '1') est transcendant, mais n'est pas un nombre-univers. Le nombre 0,1020030000004... ($n!$ fois le '0' entre l'écriture décimale de n et de $n + 1$) est un nombre-univers transcendant.

Notons que les nombres incompressibles, c'est-à-dire que l'on ne peut coder sous une forme plus concise, sont tous des nombres-univers. Si un nombre, 47 par exemple, manque dans un nombre A , alors ce nombre A peut être codé plus économiquement en évitant le signe 47, en remplaçant 48 par 47, 49 par 48, etc. La suite ne comporte plus 99, et l'on peut écrire le nombre A en base 99, ce qui donne une séquence de chiffres un peu plus courte. Un nombre qui n'est pas un nombre-univers est donc compressible, ce qui, dit autrement, signifie : tout nombre incompressible est un nombre-univers. On démontre qu'il y a une infi-

nité de nombres incompressibles, donc de nombres-univers.

Un moyen simple et direct de construire une infinité non dénombrable (plus grande que l'infini des entiers) de nombres-univers est indiqué sur la figure 5.

L'INFINI ET LES POSSIBLES

J'ai lu, il y a quelques mois, la remarque suivante qui semble être en rapport avec ce que nous examinons ici : «S'il existe un nombre infini de galaxies, toutes les combinaisons possibles présidant à la naissance et à l'existence d'un être vivant doivent se produire un nombre infini de fois : il existe non seulement une infinité de mondes, mais aussi une infinité d'individus ayant la même structure que n'importe quel individu de notre Terre : vous ou moi.»

Vous avez remarqué, j'imagine, que ce raisonnement est faux. L'infini autorise certains délires, et nous nous y sommes laissés aller avec nos énumérations de tout à l'heure, mais il n'autorise pas à dire n'importe quoi. C'est à G. Cantor que nous devons la démonstration qu'il existe une science rigoureuse de l'infini, dont les mathématiciens découvrent les lois, et qui permet d'affirmer à propos de l'infini certaines choses et en interdit d'autres. L'auteur des lignes citées pense, semble-t-il, que dès qu'un

ensemble est infini alors tout est dedans, et même que tout y est inclus une infinité de fois. C'est clairement inexact : l'ensemble des nombres s'écrivant avec les chiffres pairs 0, 2, 4, 6, 8 par exemple est infini et pourtant il ne contient pas tous les nombres, puisque 3 n'y est pas, ni 123, ni 25267!

Même si tout infini est grand (par nature!), tout infini n'est pas tout!!!

Malheureusement pour notre goût de l'éternité et notre souhait qu'il y ait d'autres formes de vie dans l'Univers : même s'il existe un nombre infini de galaxies, il se peut que la vie ne soit apparue qu'une fois, et qu'il n'y ait nulle part ailleurs un individu possédant la même structure que vous ou moi.

Il existe cependant un résultat de la théorie des probabilités qui explique peut-être l'erreur mentionnée. Si l'on tire au sort indéfiniment des chiffres, chaque chiffre ayant une probabilité non nulle d'être obtenu (par exemple 1/10) alors la suite infinie construite ainsi est, avec une probabilité 1, une suite-univers et donc toute suite finie de nombres se présentera si l'on sait attendre assez longtemps.

On affirme parfois qu'un singe tapant au hasard sur une machine à écrire finit à un moment ou un autre par écrire *Le songe d'une nuit d'été* de Shakespeare ou l'encyclopédie *Larousse* en 20 volumes. Si on prend la précaution de préciser que les choix du singe suivent une loi de probabilité qui n'omet aucune touche de la machine, c'est tout à fait exact d'après le résultat cité (*voir un raisonnement direct sur la figure 6*).

On peut aussi tirer du résultat probabiliste mentionné que si l'Univers est infini, qu'il comporte une infinité de galaxies et que les particules élémentaires à l'intérieur de chaque galaxie occupent une configuration (parmi un nombre de configurations possibles qu'on suppose fini) en respectant une loi de probabilité qui n'attribue une probabilité nulle à aucune configuration (ce qui n'est pas invraisemblable si l'Univers mélange bien tout), alors il est vrai maintenant que «toutes les combinaisons possibles présidant à la naissance et à l'existence d'un être vivant doivent se produire un nombre infini de fois : il existe non seulement une infinité de mondes, mais aussi une infinité d'individus ayant la même structure que n'importe quel individu de notre Terre : vous ou moi».

Perspectives troublantes! Certains cosmologistes comme John Barrow et Franck Tipler n'hésitent pas à les évoquer et à s'interroger sur ce qu'ils dénomment le «problème de la duplication», dont ils remarquent malicieusement que, s'il se pose vraiment, alors ils ne sont certainement pas les seuls à s'y intéresser.

L'idée que, dans certains types d'univers, tout est présent plusieurs fois entraîne qu'en un certain sens chacun de nous est éternel : lorsque vous mourrez ici sur Terre, un autre vous-même, ailleurs, vit les choses légèrement différemment et reste vivant. C'est le thème d'un livre étrange de Frank Tipler, *The Physics of Immortality*, paru l'année dernière aux éditions Doubleday et dont les spéculations sauvages ont provoqué des commentaires outragés de nombreux de ses collègues.

PROBLÈMES SUR LES NOMBRES-UNIVERS

Les nombres-univers sont des objets fascinants, puisqu'ils contiennent, par définition, toutes les combinaisons possibles de chiffres et donc, sous forme numérique, tous les livres, tous les films, toutes les vies, etc. On peut cependant assez aisément démontrer des propriétés simples de ces nombres. En voici quelques-unes sous forme de petits problèmes.

Problème 1. Est-il vrai que, dans un nombre-univers, chaque séquence est présente non seulement une fois (comme la définition le demande), mais une infinité de fois ?

Réponse. Oui. Considérons une séquence c . Chacune des séquences $c0$ (c suivie de '0'), $c10$ (c suivie de '1' et de '0'), $c110$, $c1110$, etc., est présente au moins une fois, et donc la séquence c est présente une infinité de fois.

Problème 2. Est-il vrai qu'en modifiant un nombre fini de chiffres d'un nombre-univers, il le reste ?

Réponse. Oui. Soit c une séquence finie de chiffres, elle est présente une infinité de fois (problème précédent), donc en modifiant un nombre fini de chiffres du nombre-univers s , on ne touche qu'un nombre fini d'exemplaires de la séquence c , qui est donc présente (une infinité de fois) dans le nombre modifié.

Problème 3. La somme de deux nombres-univers est-elle toujours un nombre-univers ?

Réponse. Non. Soit c un nombre-univers, soit le nombre c' obtenu en «complémentant c », c'est-à-dire en prenant pour décimale numéro i le complémentaire à 9 de la décimale numéro i (le complémentaire de 0 est 9, le complémentaire de 1 est 8, etc.). Le nombre $c + c'$ possède la suite de décimales 0,99999999... et n'est donc pas un nombre-univers. Je ne connais pas la réponse à la même question pour le produit : un lecteur saura-t-il y répondre ?

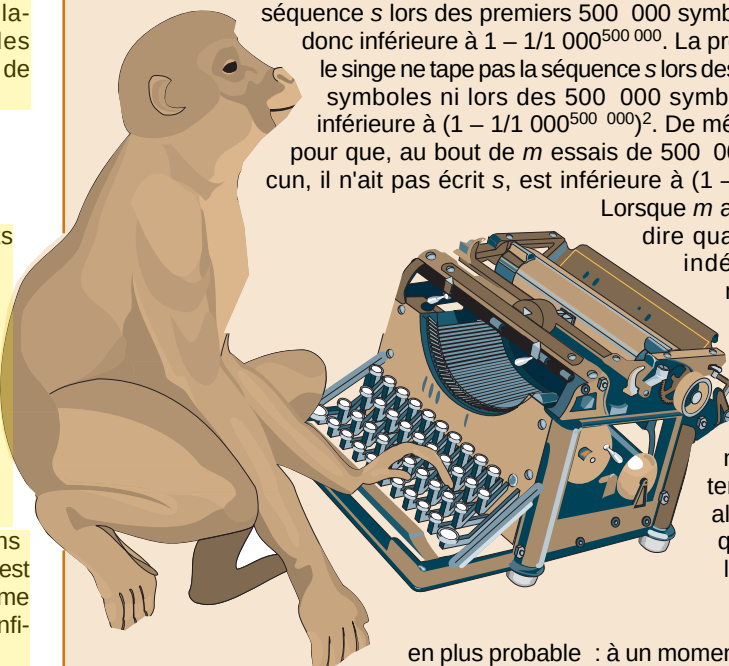
Problème 4. Le mélange par interpénétration de deux nombres-univers (un

6. Le singe qui tape au hasard

Supposons qu'à chaque fois que le singe tape sur une touche de sa machine, la probabilité pour qu'il tape un 'a' soit supérieure à $1/1\,000$. De même pour le 'b', etc. Donnons-nous une séquence s de 500 000 symboles (un texte de Shakespeare, par exemple). Alors la probabilité pour que le singe tape, dès son premier essai, la séquence s est supérieure à $1/1\,000^{500\,000}$, ce qui est très faible, mais non nul. La probabilité pour que le singe ne tape pas la séquence s lors des premiers 500 000 symboles qu'il écrit est donc inférieure à $1 - 1/1\,000^{500\,000}$. La probabilité pour que le singe ne tape pas la séquence s lors des premiers 500 000 symboles ni lors des 500 000 symboles suivants est inférieure à $(1 - 1/1\,000^{500\,000})^2$. De même, la probabilité pour que, au bout de m essais de 500 000 symboles chacun, il n'ait pas écrit s , est inférieure à $(1 - 1/1\,000^{500\,000})^m$.

Lorsque m augmente, c'est-à-dire quand le singe tape indéfiniment sur sa machine, la probabilité de ne pas voir apparaître s tend vers 0 (on utilise le fait que, si r est un nombre positif strictement inférieur à 1, alors r^m tend vers 0 quand m tend vers l'infini). Autrement dit, voir apparaître s devient de plus

en plus probable : à un moment ou à un autre, le singe écrit le texte de Shakespeare.



bout du premier, un bout du second, un bout du premier, etc.) en est-il toujours un ?

Réponse. Non. Si on mélange deux fois le même nombre-univers par bouts de longueur 1 (un chiffre du premier, un chiffre du second, etc.), on n'a plus que des chiffres doublés 115544..., ce qui ne peut pas être un nombre-univers, puisque 123, par exemple, ne sera pas présent.

Problème 5. Existe-t-il toujours une façon de faire le mélange par interpénétration de deux nombres-univers de façon à obtenir un nombre-univers ?

Réponse. Oui. Soit S et S' deux nombres-univers. On fait la liste de toutes les séquences finies $c_1, c_2, \dots, c_N, \dots$. On construit un nouveau nombre-univers S'' de la façon suivante. On prend un bout de S assez long pour que c_1 y soit présent (c'est possible, car S , par définition, contient une infinité de fois c_1), on prend un bout de S' assez long pour que c_2 soit dedans (c'est possible), on prend un bout de ce qui reste de S assez long pour que c_3 soit dedans, etc. Par construction, S'' est un nombre-univers.

Problème 6. Dans un nombre-univers, la probabilité de tomber sur un '1' peut-elle être nulle à l'infini ?

Réponse. Oui. Le nombre-univers transcendant évoqué plus haut 0,1020030000004... donne la réponse : la probabilité de tomber sur un '1' (ou un '2', etc.) est nulle à l'infini, car les zéros sont de plus en plus nombreux.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université des sciences et techniques de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

Jorge Luis BORGES, *Fictions*, éditions Gallimard, Paris, 1951.

Franck J. TIPLER, *The Omega Point as Eschaton : Answers to Pannenberg's Questions for Scientifics*, Zygon, vol. 24, n° 2, pp. 217-253, 1989.

David GALE, *Popular Mathematics*, in *Math. Intel.*, vol 14, n° 3, pp. 62-64, 1992 (pour une preuve de ce qui est affirmé sur 2').

John D. BARROW et Franck J. TIPLER, *Is the Universe Big Enough to Contain all Possibilities?*, R.R. 1993.

Jean-Paul DELAHAYE, *Cinq classes d'idées, chapitre 3 de Information, complexité et hasard*, éditions Hermès, Paris, 1994.

Franck J. TIPLER, *The Physics of Immortality*, Doubleday, 1994.