

L'idée que, dans certains types d'univers, tout est présent plusieurs fois entraîne qu'en un certain sens chacun de nous est éternel : lorsque vous mourrez ici sur Terre, un autre vous-même, ailleurs, vit les choses légèrement différemment et reste vivant. C'est le thème d'un livre étrange de Frank Tipler, *The Physics of Immortality*, paru l'année dernière aux éditions Doubleday et dont les spéculations sauvages ont provoqué des commentaires outragés de nombreux de ses collègues.

PROBLÈMES SUR LES NOMBRES-UNIVERS

Les nombres-univers sont des objets fascinants, puisqu'ils contiennent, par définition, toutes les combinaisons possibles de chiffres et donc, sous forme numérique, tous les livres, tous les films, toutes les vies, etc. On peut cependant assez aisément démontrer des propriétés simples de ces nombres. En voici quelques-unes sous forme de petits problèmes.

Problème 1. Est-il vrai que, dans un nombre-univers, chaque séquence est présente non seulement une fois (comme la définition le demande), mais une infinité de fois ?

Réponse. Oui. Considérons une séquence c . Chacune des séquences $c0$ (c suivie de '0'), $c10$ (c suivie de '1' et de '0'), $c110$, $c1110$, etc., est présente au moins une fois, et donc la séquence c est présente une infinité de fois.

Problème 2. Est-il vrai qu'en modifiant un nombre fini de chiffres d'un nombre-univers, il le reste ?

Réponse. Oui. Soit c une séquence finie de chiffres, elle est présente une infinité de fois (problème précédent), donc en modifiant un nombre fini de chiffres du nombre-univers s , on ne touche qu'un nombre fini d'exemplaires de la séquence c , qui est donc présente (une infinité de fois) dans le nombre modifié.

Problème 3. La somme de deux nombres-univers est-elle toujours un nombre-univers ?

Réponse. Non. Soit c un nombre-univers, soit le nombre c' obtenu en «complémentant c », c'est-à-dire en prenant pour décimale numéro i le complémentaire à 9 de la décimale numéro i (le complémentaire de 0 est 9, le complémentaire de 1 est 8, etc.). Le nombre $c + c'$ possède la suite de décimales 0,99999999... et n'est donc pas un nombre-univers. Je ne connais pas la réponse à la même question pour le produit : un lecteur saura-t-il y répondre ?

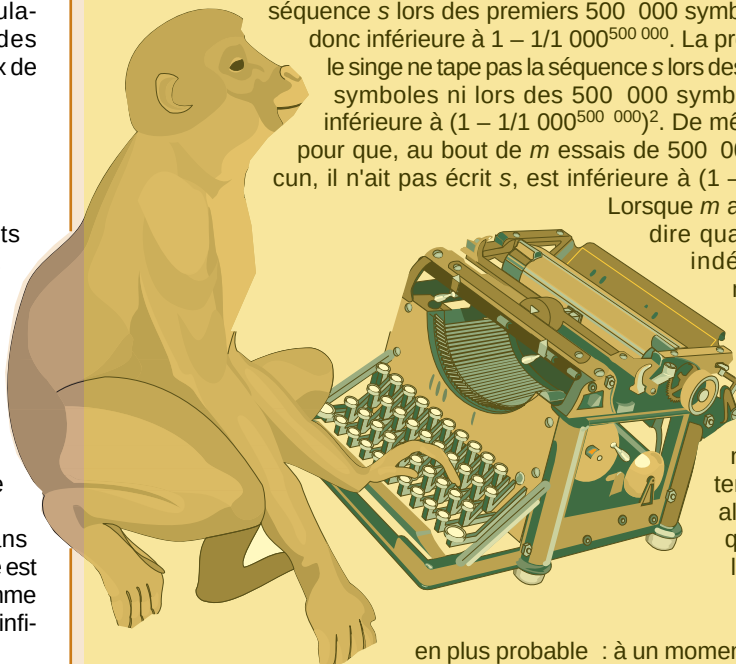
Problème 4. Le mélange par interpénétration de deux nombres-univers (un

6. Le singe qui tape au hasard

Supposons qu'à chaque fois que le singe tape sur une touche de sa machine, la probabilité pour qu'il tape un 'a' soit supérieure à $1/1\,000$. De même pour le 'b', etc. Donnons-nous une séquence s de 500 000 symboles (un texte de Shakespeare, par exemple). Alors la probabilité pour que le singe tape, dès son premier essai, la séquence s est supérieure à $1/1\,000^{500\,000}$, ce qui est très faible, mais non nul. La probabilité pour que le singe ne tape pas la séquence s lors des premiers 500 000 symboles qu'il écrit est donc inférieure à $1 - 1/1\,000^{500\,000}$. La probabilité pour que le singe ne tape pas la séquence s lors des premiers 500 000 symboles ni lors des 500 000 symboles suivants est inférieure à $(1 - 1/1\,000^{500\,000})^2$. De même, la probabilité pour que, au bout de m essais de 500 000 symboles chacun, il n'ait pas écrit s , est inférieure à $(1 - 1/1\,000^{500\,000})^m$.

Lorsque m augmente, c'est-à-dire quand le singe tape indéfiniment sur sa machine, la probabilité de ne pas voir apparaître s tend vers 0 (on utilise le fait que, si r est un nombre positif strictement inférieur à 1, alors r^m tend vers 0 quand m tend vers l'infini). Autrement dit, voir apparaître s devient de plus

en plus probable : à un moment ou à un autre, le singe écrit le texte de Shakespeare.



bout du premier, un bout du second, un bout du premier, etc.) en est-il toujours un ?

Réponse. Non. Si on mélange deux fois le même nombre-univers par bouts de longueur 1 (un chiffre du premier, un chiffre du second, etc.), on n'a plus que des chiffres doublés 115544..., ce qui ne peut pas être un nombre-univers, puisque 123, par exemple, ne sera pas présent.

Problème 5. Existe-t-il toujours une façon de faire le mélange par interpénétration de deux nombres-univers de façon à obtenir un nombre-univers ?

Réponse. Oui. Soit S et S' deux nombres-univers. On fait la liste de toutes les séquences finies $c_1, c_2, \dots, c_N, \dots$. On construit un nouveau nombre-univers S'' de la façon suivante. On prend un bout de S assez long pour que c_1 y soit présent (c'est possible, car S , par définition, contient une infinité de fois c_1), on prend un bout de S' assez long pour que c_2 soit dedans (c'est possible), on prend un bout de ce qui reste de S assez long pour que c_3 soit dedans, etc. Par construction, S'' est un nombre-univers.

Problème 6. Dans un nombre-univers, la probabilité de tomber sur un '1' peut-elle être nulle à l'infini ?

Réponse. Oui. Le nombre-univers transcendant évoqué plus haut 0,1020030000004... donne la réponse : la probabilité de tomber sur un '1' (ou un '2', etc.) est nulle à l'infini, car les zéros sont de plus en plus nombreux.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université des sciences et techniques de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

Jorge Luis BORGES, *Fictions*, éditions Gallimard, Paris, 1951.

Franck J. TIPLER, *The Omega Point as Eschaton : Answers to Pannenberg's Questions for Scientifics*, Zygon, vol. 24, n° 2, pp. 217-253, 1989.

David GALE, *Popular Mathematics*, in *Math. Intel.*, vol 14, n° 3, pp. 62-64, 1992 (pour une preuve de ce qui est affirmé sur 2').

John D. BARROW et Franck J. TIPLER, *Is the Universe Big Enough to Contain all Possibilities?*, R.R. 1993.

Jean-Paul DELAHAYE, *Cinq classes d'idées, chapitre 3 de Information, complexité et hasard*, éditions Hermès, Paris, 1994.

Franck J. TIPLER, *The Physics of Immortality*, Doubleday, 1994.