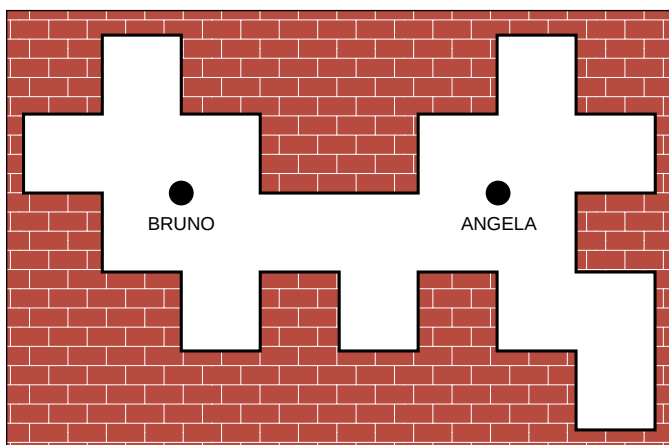
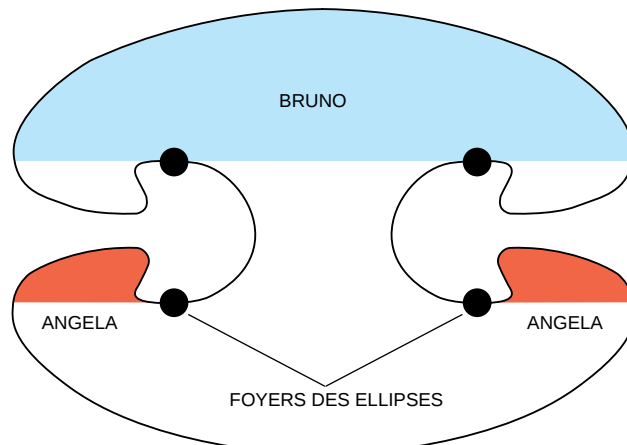




3. Ces blocs carrés constituent une autre chambre réfléchissante qui protège Angela de tout rayon issu de Bruno.



4. Ces arcs d'ellipses limitent une pièce comportant des zones en rouge où Angela ne reçoit aucun rayon issu de Bruno.

pairs. Si ces coordonnées ne sont pas toutes deux des multiples de 4, une au moins des coordonnées du milieu de AA' est un entier impair, et donc ce milieu est un point rouge ou blanc du réseau. Si les deux coordonnées de A' sont des multiples de 4, on remplace A' par le milieu A'' de AA' . Après un nombre fini de tels remplacements, on arrive à une coordonnée (au moins) impaire, et le résultat en découle. Si, par exemple, les coordonnées de A' sont (48 ; 28), celles de A'' seront (24 ; 14), celles de A''' (12 ; 7), qui sera donc un point rouge ou blanc.

Ainsi tout trajet déplié joignant A à un point noir du réseau frappe d'abord nécessairement un point rouge ou blanc et, par conséquent, le trajet réel doit frapper un des deux autres sommets avant de revenir vers A .

Nous pouvons construire des pièces polygonales en assemblant verticalement, horizontalement ou diagonalement des parties de ce réseau triangulaire (voir la figure 2). Supposons qu'un rayon de lumière parte de Bruno et, après diverses réflexions sur les murs de la pièce, atteigne Angela et que, tous deux, soient placés sur des points noirs. Nous pouvons alors replier ce rayon dans un unique triangle générateur, mais nous avons établi que tout trajet joignant deux points noirs devait frapper aussi un point rouge ou blanc, de sorte qu'en dépliant de nouveau, le rayon initial devrait aussi frapper un point rouge ou blanc. Supposons à présent que notre construction satisfasse les trois conditions suivantes

- Les deux points noirs représentant Angela et Bruno sont à l'intérieur de la pièce.
 - Aucun point rouge ou blanc n'est intérieur.
 - Tout point rouge ou blanc sur les limites de la pièce est sur un sommet.
- Alors tout rayon frappant un point rouge ou blanc frappe un sommet et est

donc absorbé, de sorte qu'un tel rayon lumineux n'existe pas.

Si vous essayez de construire de telles pièces, vous verrez que cela exige une dose minimale d'ingéniosité. Par exemple, vous devrez ajouter des triangles supplémentaires pour introduire des courbes additionnelles dans la frontière ; à moins d'être très attentif, ces torsions peuvent introduire de nouveaux points blancs ou rouges à l'intérieur du réseau et violer ainsi la seconde condition.

La pièce de l'illustration est construite avec 39 copies par réflexion d'un triangle rectangle isocèle : l'article de G. Tokarsky en contient une de 29 triangles composants. Sauriez-vous la retrouver ? Ou en trouver d'autres ? G. Tokarsky a aussi mis au point une théorie similaire pour les pièces s'obtenant en dépliant un rectangle ou en utilisant des triangles ayant d'autres formes, de même que des pièces tridimensionnelles obtenues à partir de principes similaires.

UNE SURFACE SOMBRE EXISTE-T-ELLE ?

Ces exemples montrent que, dans une chambre polygonale, il peut y avoir des points où une allumette enflammée n'éclaire pas tous les points de la pièce. Tout ce que nous avons prouvé, cependant, c'est qu'un point au moins n'est pas éclairé. Est-il possible alors que toute une région d'aire non nulle soit sans aucun point éclairé ? Le problème est nettement plus difficile. Tout ce que nous savons, c'est que les rayons partant de Bruno peuvent passer aussi près que l'on veut d'Angela ; nous avons juste prouvé qu'ils ne pouvaient pas frapper sa «tête».

La réponse concernant les pièces polygonales semble inconnue, mais avec un collaborateur, Roger Penrose, a montré, en 1958, que si une pièce a des fron-

tières courbes, des régions totalement non éclairées peuvent exister. Par exemple, vous vous souvenez qu'une ellipse possède deux points particuliers appelés foyers. On prouve que tout rayon lumineux passant entre les foyers et qui se réfléchit sur la courbe recoupe l'axe joignant les foyers avant de frapper de nouveau la courbe. En exploitant cette propriété, on peut facilement vérifier qu'une pièce limitée par deux moitiés d'une ellipse (voir la figure 4) a des régions totalement non illuminées. Tout particulièrement, des rayons issus d'un point de la région en bleu (Bruno) ne peuvent pénétrer les régions en rose (Angela).

Il y a beaucoup de problèmes similaires, certains résolus, d'autres non. Vous pourrez en trouver une sélection dans *Unsolved Problems in Geometry*, de Hallard Croft, Kenneth Falconer et Richard Guy (Springer-Verlag, 1991) ainsi que dans *Old and New Problems in Plane Geometry and Number Theory*, de Victor Klee et Stan Wagon (Association Mathématique Américaine, 1991). Par exemple, Jeffrey Rauch, de l'Université du Michigan, a montré qu'il existe une pièce à murs curvilignes «réguliers» en tous points, sauf un, qui requiert un nombre infini d'allumettes pour être entièrement éclairée.

J. Rauch a également prouvé que, pour tout nombre fini n d'allumettes, il existe une pièce à frontière curviligne régulière qu'on ne peut entièrement éclairer avec n allumettes. Janos Pach, du City College de New York, a posé cette élégante interrogation : si l'on craque une allumette dans une forêt d'arbres parfaitement réfléchissants, sa lumière sera-t-elle visible de l'orée ? Les arbres peuvent, par exemple, être schématisés par des cercles si le problème est envisagé dans le plan. Personne ne connaît la réponse !