

Un autre auteur indien, Krishna, aborde le concept d'infiniment petit, qui sera très utilisé dans le calcul différentiel et intégral à la fin du XVII^e et au XVIII^e siècles. Euler, le grand mathématicien du XVIII^e siècle, développait ce calcul infinitésimal avec des infiniment petits, qu'il négligeait dans certains calculs. Comme les mathématiques sont une science parfaitement exacte, on ne peut pas négliger quelque chose qui ne soit pas rigoureusement nul, donc ces infiniment petits... sont nuls.

Mais alors, comment peut-on calculer avec des zéros ? Dans le calcul infinitésimal, il y a des choses qu'on appelle dx , dx^2 . Si toutes valent zéro, que signifie cette notation ? Euler explique qu'il y a deux façons de comparer des grandeurs. La façon qu'il appelle arithmétique, qui consiste à dire : « Deux quantités sont égales si leur différence est nulle ». Sous ce rapport-là, tous les infiniment petits sont égaux entre eux. Selon une autre façon de voir, deux quantités sont égales quand leur quotient est égal à 1, et, à ce moment-là, le quotient de deux zéros, $0/0$, peut avoir un sens. comme l'indiquait le mathématicien indien Bhāskara.

Cette définition est imposée par l'astronomie chez Bhāskara, et par le développement du calcul différentiel chez Euler. La pratique d'Euler du calcul sur des infiniment petits, nuls quand cela l'arrange, ne nous satisfait plus maintenant. Au XX^e siècle, on a développé une théorie, l'analyse non standard, où les infiniment petits ont un statut propre sans être des zéros : ce sont des quantités qui, multipliées par n'importe quel entier, restent toujours infiniment petites. On a ainsi donné un sens légitime et rigoureux à tous ces infiniment petits qui avaient un statut incertain au XVIII^e siècle et même encore au XIX^e siècle.

Zéro est-il le premier nombre ? Quand on commence à numérotter, on commence par 1, pas par 0. On s'interroge : le XX^e siècle se termine-t-il en 2000 ou en 2001 ? On verra bientôt refluer le débat parce que notre ère commence par l'année 1 et pas par l'année zéro. Les Mayas, des spécialistes du calendrier, étaient plus cohérents : ils commençaient le mois par le jour zéro. Chez les Mayas, la querelle sur le début du troisième millénaire n'aurait pas lieu d'être !

Au siècle dernier, Peano a fondé l'axiomatique, mais il n'admettait pas encore zéro comme nombre et il commence à 1, ce qui est maladroit.

0⁰ ?

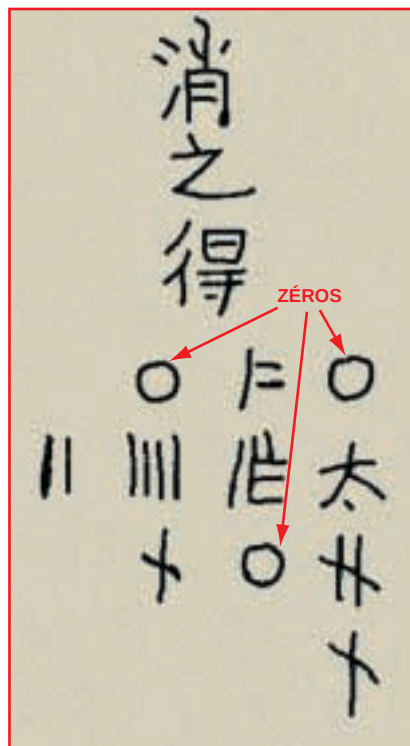
Le problème de la valeur de 0^0 apparaît dans Euler. Quelle est la valeur de a^b quand on fait tendre a et b vers zéro. Il

y a ou non une limite selon la façon dont a et b tendent vers zéro. Si on fait x^x , et qu'on fait tendre x vers zéro, on obtient 1. C'est la seule définition raisonnable, cohérente, de 0^0 . Nous pouvons mieux la justifier avec la théorie des ensembles.

En théorie des ensembles, les nombres dérivent des conceptions sur les ensembles. On définit les nombres ordinaux à partir de l'idée d'ensembles bien ordonnés. Un ensemble bien ordonné, c'est un ensemble où l'on a une relation d'ordre qui permet de dire si un élément est avant un autre : chaque fois qu'on prend une partie non vide d'un ensemble bien ordonné, cette partie a un premier élément.

Dans la hiérarchie des ensembles, il y a d'abord l'ensemble vide qui n'a aucun élément : quel que soit l'élément x , x n'appartient pas à l'ensemble vide. Ce qui est difficile à concevoir, c'est que, là où il n'y a rien, il y a quand même un ensemble. Il faut s'ôter de la tête qu'un ensemble est une collection d'objets, parce qu'une collection qui n'a aucun objet n'est pas une collection.

L'ensemble vide est déjà un ordinal, l'ordinal zéro. On peut construire un deuxième ensemble qui a pour seul élément l'ensemble vide. C'est l'ordinal 1.



5. Le plus ancien texte mathématique chinois comportant le symbole du zéro sous forme d'un cercle est le Shushu jiu Zhang de 1247. Le texte ci-dessus, le Siyuan yujian, date de 1303. L'énorme intervalle entre le zéro-cercle indien et le zéro-cercle chinois militerait en faveur d'une influence indienne.

Ensuite on prend l'ensemble qui a comme seul élément l'ensemble vide, et l'ensemble vide, et l'on définit l'ordinal 2.

Cette construction des nombres entiers à partir de l'ensemble vide est l'œuvre du mathématicien américain d'origine hongroise, von Neumann. Les cardinaux sont des ordinaux particuliers : chaque ordinal fini est un cardinal. À chaque ensemble correspond un cardinal qui compte combien il y a d'éléments. Sur les ensembles, on peut faire des constructions qui singent les opérations arithmétiques sur les nombres. On définit ces opérations sur les ensembles d'abord, et les opérations sur les nombres en découlent.

Ainsi, la somme disjointe des deux ensembles est un nouvel ensemble dont les éléments appartiennent à l'un ou à l'autre. Cette somme correspond simplement à l'addition des nombres : si l'ensemble A a pour cardinal a , si B a pour cardinal b , le cardinal de la somme disjointe est $a + b$. Cette transposition a toutes les propriétés de l'addition et peut être étendue aux cardinaux infinis. Similairement, le produit $A \times B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble des couples qui ont deux composantes a ; b , une composante a dans A , une composante b dans B . Le cardinal de $A \times B$ est le cardinal de A multiplié par le cardinal de B .

Une troisième opération est l'exponentiation : A^B , A et B étant des ensembles : c'est l'ensemble de toutes les applications de B dans A qui, à chaque élément de B , associe un élément de A . L'ensemble de ces applications est A^B . Le cardinal de A^B c'est le cardinal de A à la puissance du cardinal de B . Nous pouvons alors donner un sens à 0^0 , qui est le cardinal de l'ensemble vide à la puissance de l'ensemble vide : ce sont toutes les applications de l'ensemble vide dans lui-même. Comme il n'y en a qu'une, 0^0 est égal à 1.

D'AUTRES ZÉROS

L'invention du zéro est une très grande découverte mathématique : tout un pan des mathématiques est né de ce bouillonnement qui vient du zéro.

Sans le zéro, il n'y a pas de dérivées, pas de calcul infinitésimal, pas d'intégrales. L'utilisation du zéro en tant qu'infiniment petit non nul est très délicate, et s'affine encore aujourd'hui. En géométrie algébrique, on a besoin d'infiniment petits parce que les courbes algébriques ont des tangentes. Il faut savoir les construire, calculer dessus, mais, en algèbre, on ne peut pas tou-



LES SYMÉTRIES BRISÉES

Pascal Chossat

La symétrie, de simple conséquence des lois physiques, est devenue principe d'explication dans des domaines aussi divers que les transitions de phase ou la turbulence.

La théorie des brisures de symétrie rend compte de la diversité des phénomènes en s'attachant aux symétries perdues, «brisées», d'un état originel.

Elle donne une nouvelle compréhension de la genèse des formes dans la nature.

Voir bon de commande p. 98

POUR LA
SCIENCE
DIFFUSION BELIN

jours faire tendre une quantité vers zéro, comme on le fait en analyse, parce qu'on ne calcule pas toujours avec des nombres réels.

Il arrive alors que l'on utilise d'autres règles : par exemple, en calculant «modulo quelque chose», c'est-à-dire en remplaçant chaque nombre par le reste de la division par un certain module. Ainsi 3 est égal à 1 modulo 2 parce que le reste de la division de 3 par 2 donne 1. Dans ce cadre, des éléments dénommés «nilpotents» jouent le rôle du zéro. Ce sont, par exemple, des éléments non nuls, mais dont le carré est nul. On peut considérer que cet ε est un élément petit, parce que son carré est nul. Quand on fait de l'analyse, on dira ε est petit, le carré est beaucoup plus petit, on le néglige ; en algèbre, on dit ε n'est pas nul, mais le carré de ε est nul.

Ce type de calcul est facile à concevoir parce qu'il est familier. Les compteurs d'eau, les compteurs de kilomètres des voitures reviennent à zéro automatiquement quand ils dépassent un certain nombre. Les Mayas avaient cette conception du calendrier : à la fin de l'année, ils repartaient à zéro.

Examinons un exemple numérique : dans le calcul modulo 9, chaque nombre est remplacé par le reste de sa division par 9 (C'est ce qu'on fait quand on fait la preuve par 9). Trois est un élément nilpotent : le nombre 3 n'est pas nul, mais, modulo 9, 3^2 , qui fait 9, est égal à zéro.

UN ARGUMENT RÉALISTE ?

Toutes ces belles propriétés sont-elles inattendues ? Ce qui est inattendu, c'est qu'elles aient été indépendamment découvertes par de multiples civilisations. Sont-elles le fruit de l'imagination humaine, comme l'affirment les constructivistes, ou toutes les belles caractéristiques du zéro reposent-elles dans une caverne scintillante de type Ali Baba qu'il nous appartient d'explorer, comme le pensent les réalistes ? Le zéro pose toute la question de la réalité des mathématiques et des difficultés de sa définition.

Christian HOUZEL est mathématicien, historien des mathématiques et professeur à l'IUFM (Institut universitaire de formation des maîtres) de Paris.

Une retranscription de ce débat, enregistré avec Émile Noël au Palais de la Découverte, sera diffusée sur France Culture le 9 octobre à 9 heures.

Bières de pharaons

Les Égyptiens connaissaient le maltage.

Les hiéroglyphes ont révélé que les Égyptiens fabriquaient de la bière, mais comment s'y prenaient-ils ? Les provisions de route pour l'au-delà, enterrées avec les défunts, viennent de le dire : utilisant des résidus de cette bière des bières, l'archéologue Delwen Samuel, de l'Université de Cambridge, a reconstitué les recettes des brasseurs égyptiens.

On a longtemps cru que les Égyptiens étaient des brasseurs primitifs : ils auraient fait leur bière à partir de pâte à pain très levée et peu cuite, qu'ils auraient dispersée dans l'eau, tamisée et fermentée par les levures utilisées pour la confection du pain. Comment tester cette hypothèse ? Les résidus alimentaires antiques étant très bien conservés dans le climat aride de l'Égypte (les micro-organismes ont besoin d'eau pour proliférer), les archéologues des années 1920 avaient utilisé le microscope optique pour préciser la matière première des brasseurs égyptiens : du blé emmer (*Triticum dicoccum*) et de l'orge, utilisés soit ensemble, soit séparément. Quels traitements ces céréales subissaient-elles ?

D. Samuel a complété les premières études par des analyses au microscope électronique de tissus végétaux, de grains d'amidon, de levures et d'autres micro-organismes. Elle s'est surtout intéressée

aux grains d'amidon des céréales retrouvées à Deir el-Medina, où vivaient entre l'an -550 et l'an -307 les ouvriers qui construisaient les tombes de la Vallée des rois ; d'autres échantillons analysés provenaient d'Amarna, en Moyenne Égypte. Les grains d'amidon étant modifiés de façon caractéristique par les traitements qu'on leur fait subir, l'archéologue britannique supposait que l'on trouverait dans la morphologie des grains antiques la clef des anciens procédés de brasserie.

Les céréales sont composées de grains d'amidon dans des enveloppes ; les grains, eux, sont composés de deux types de grosses molécules, l'amylose et l'amylopectine, enchaînement respectivement linéaire et ramifié d'un motif de base qui est le glucose.

Quand des grains d'amidon sont chauffés dans l'eau, l'amylose se dissout dans la solution, et le reste des grains gonfle, parce que l'eau s'introduit par capillarité entre les molécules. Au microscope, on voit les grains gonfler, se replier et, finalement, fusionner. Quand la quantité d'eau est limitée, les grains ne sont pas complètement dispersés, de sorte qu'ils conservent une limite identifiable.

De surcroît, les enzymes des céréales qui germent dissocient l'amidon en molé-

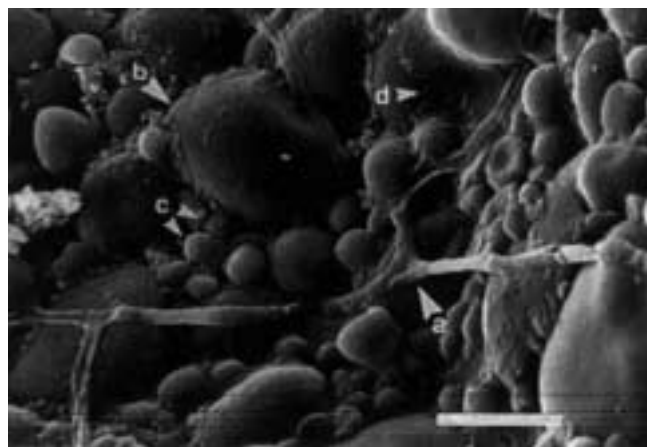
cules plus petites, les dextrines ou les sucres élémentaires, ce qui creuse la surface des grains d'amidon de petites cavités et creuse des galeries dans les grains. Si les Égyptiens avaient obtenu de la bière en dispersant seulement de la mie de pain dans l'eau, les grains d'amidon auraient été simplement fusionnés, mais comme ils étaient également attaqués, D. Samuel a conclu que les Égyptiens pratiquaient une sorte de maltage (le maltage moderne est l'opération qui consiste à tremper de l'orge dans l'eau, à provoquer la germination des grains, puis à sécher ces derniers dans une touraille).

Apparemment les Égyptiens maltaient et chauffaient d'abord les grains, ce qui engendrait les sucres et des molécules aromatiques par les réactions dites de Maillard, entre les sucres et les acides aminés. Puis ils mélangeaient les grains maltés à des grains germés et non chauffés et à de l'eau. La solution formée était ensuite décantée et fermentée.

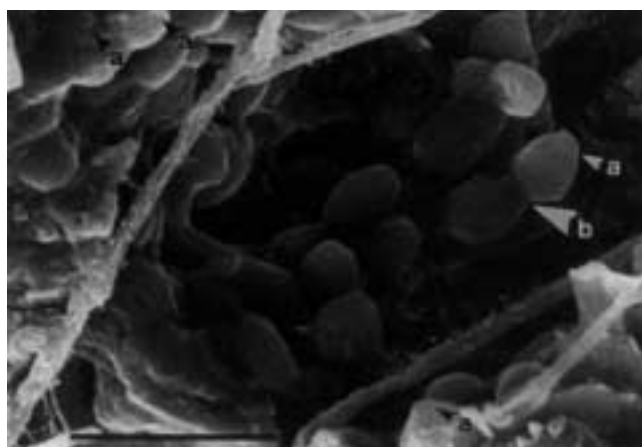
Quels ustensiles utilisaient-ils pour le maltage ? Les archéologues, guidés par les analyses au microscope, peuvent se mettre en quête. Quel goût avait leur bière ? James Merrington, brasseur à Newcastle, s'est fondé sur le procédé retrouvé par D. Samuel : utilisant blé emmer, coriandre et genièvre, il a obtenu une bière plaisante, avec un goût complexe et puissant. Ce n'est peut-être pas une réplique des bières antiques, mais la tentative était intéressante.

Hervé This

Prochain rendez-vous France Info et Pour la Science, le XX octobre 1996, avec la chronique Info Sciences de Marie-Odile Monchicourt.



Microstructure d'un fragment de pain. On distingue des grains d'amidon de diverses tailles. Les grains ne présentent pas de signe de déformation particulière.



Cellules de levure trouvées dans des résidus de bière trouvés dans une poterie d'une tombe de l'Égypte antique. On aperçoit des modifications sur plusieurs grains (b).