

Mathématiques sans se lacer?

IAN STEWART

Les principes de l'optique géométrique montre la supériorité absolue du laçage de type américain.

Qui peut se dire mathématicien? Il y a quelques années, dans un rare éclair de lucidité, il m'apparut qu'un mathématicien est quelqu'un qui saisit toute opportunité de faire des mathématiques, là où d'autres ne voient pas une possible mathématisation du problème.

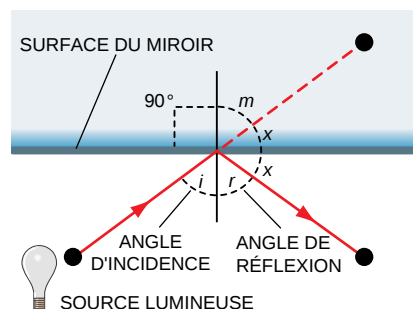
Considérez des lacets de chaussures. Comment traiter mathématiquement les problèmes – qu'il nous faudra inventer –, concernant des lacets de chaussures? J'ai appris l'existence de tels problèmes dans l'article *Le problème des lacets de chaussures*, de John Halton, publié dans le numéro d'automne 1995 du *Mathematical Intelligencer*.

Le problème est d'énoncé simple : comment lacer le plus économiquement possible votre chaussure? Il existe au moins trois manières usuelles de lacer

des chaussures (voir la figure 1) : le «zigzag américain», le «collet européen» (d'où dérive le terme «collet monté», plus sans doute à propos de corsets que de chaussures) et l'expéditif «gavage». Pour l'utilisateur, les styles de laçages peuvent différer par leurs esthétiques et les temps qu'ils requièrent. Le fabricant de chaussures se pose une autre question : avec quel type de laçage les lacets sont-ils les plus petits (et donc les moins coûteux)?

Pour déterminer la longueur de lacet, je ne m'intéresserai qu'à celle des segments rectilignes, la quantité supplémentaire de lacet utilisée pour le nouer étant la même pour toutes les méthodes et pouvant donc être ignorée.

Ma terminologie sera celle du lacet vue par l'utilisateur, de sorte que la paire d'œillets «du haut» est celle près de la cheville. De même, j'idéaliserai le



2. Selon le principe de Fermat, la lumière choisit le trajet le plus court pour aller d'un point à un autre ; on prouve alors que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

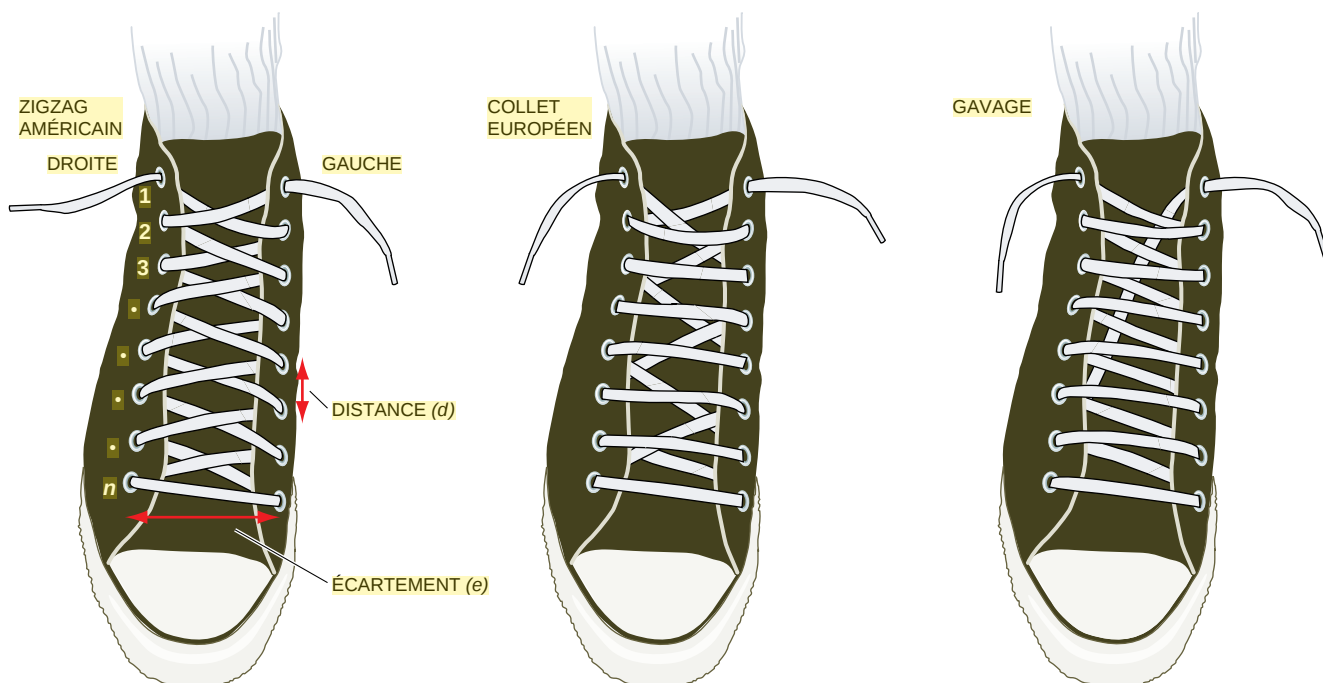
lacet par une ligne sans épaisseur, et les œillets par des points. Une attaque frontale du problème consiste à exprimer la longueur du lacet en fonction de trois paramètres :

- le nombre n de paires d'œillets,
- la distance d entre deux œillets verticalement successifs,
- l'écartement e entre deux œillets d'une même paire.

À l'aide du théorème de Pythagore (je me demande ce que le grand homme aurait pensé de cette application!), il est aisé de montrer que les longueurs des lacets sont les suivantes :

- américain : $e + 2(n-1)\sqrt{d^2 + e^2}$
- européen : $(n-1)e + 2\sqrt{d^2 + e^2} + (n-2)\sqrt{4d^2 + e^2}$
- gavage : $(n-1)e + (n-1)\sqrt{d^2 + e^2} + \sqrt{(n-1)^2d^2 + e^2}$

Laquelle est la plus petite? Supposons, pour fixer les idées, que n est



1. Il y a plusieurs manières de lacer ses chaussures ; nous en étudierons trois : le laçage américain, le laçage européen et le gavage. Lequel de ces trois types correspond-il à la plus petite longueur de lacet?

égal à 8, comme sur la figure, $d = 1$ et $e = 2$. Les longueurs sont alors :

- américain : $2 + 14\sqrt{5} = 33,30495\dots$
- européen : $14 + 2\sqrt{5} + 6\sqrt{8} = 35,443\dots$
- gavage : $14 + 7\sqrt{5} + \sqrt{53} = 36,9325\dots$

Pouvons-nous être certains que le laçage américain soit toujours le plus court ? Un traitement algébrique précis montre que si d et e sont non nuls et si n est au moins égal à 4, alors les laçages sont, dans l'ordre des longueurs croissantes : l'américain, l'euro-péen et celui dénommé gavage. Si $n = 3$, l'américain est encore le plus court, mais les deux autres sont égaux. Si $n = 2$, alors les trois laçages sont de même longueur, mais qui, autre qu'un mathématicien, se préoccuperait d'un tel cas ? Cette approche algébrique est compliquée et ne nous éclaire pas sur ce qui rend tel ou tel laçage plus efficace.

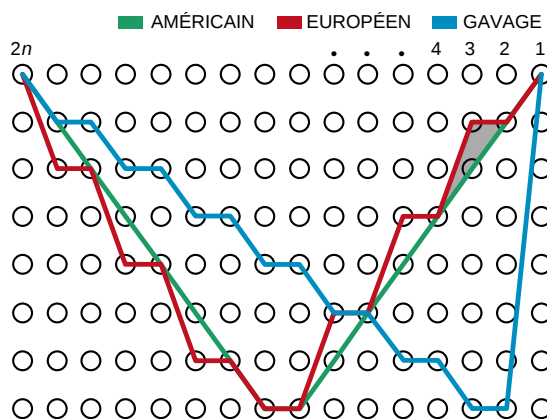
L'APPROCHE GÉOMÉTRIQUE

Attaquant le problème sous un autre angle, J. Halton observe qu'un artifice géométrique astucieux rend manifeste que le laçage américain est le plus court des trois. L'idée est inspirée de l'optique géométrique, l'étude des trajectoires des rayons lumineux.

Il y a longtemps, les mathématiciens ont découvert que la géométrie des rayons lumineux peut être rendue plus lumineuse (c'est le cas de le dire) en appliquant de judicieuses réflexions pour rendre rectilignes des trajectoires anguleuses. Par exemple, pour justifier la classique loi de la réflexion « l'angle de réflexion est égal à celui d'incidence », on examinera un rayon lumineux frappant un miroir et rebondissant sur celui-ci. Si on envisage le symétrique de la deuxième partie de la trajectoire par rapport au plan du miroir (voir la figure 2), on obtient, avec la première partie, une trajectoire perçant ce plan et pénétrant le monde d'Alice au-delà du miroir.

Suivant le principe du temps de parcours minimal, une propriété générale des rayons lumineux énoncée par Pierre de Fermat, une telle trajectoire doit atteindre son but en un temps le plus court possible, ce qui, ici, signifie qu'elle doit être un segment de droite. Dessinons la normale au miroir au point d'incidence. Alors, l'angle noté m sur la figure est égal à l'angle d'incidence i ; de plus, les deux angles marqués x sont égaux, mais $m + x = 90$ degrés, et si r est l'angle de réflexion, $r + x = 90$ degrés. Par conséquent, $m = r = i$.

J. Halton utilise une extension de ces représentations géométriques pour les trois types de laçages. Il dessine un diagramme (voir la figure 3) fait de $2N$

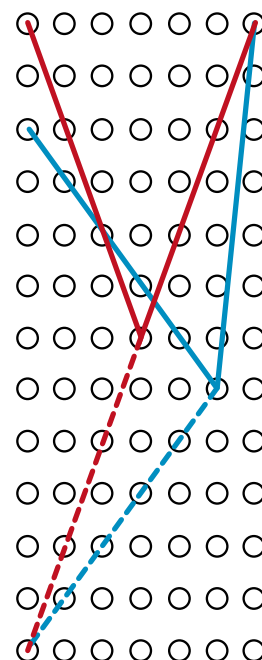


3. En utilisant la méthode de réflexion, on détermine quel est le laçage le plus court à partir de considérations géométriques. Les colonnes de numérotation impaire représentent les œillets de gauche, les colonnes paires les œillets de droite. Ainsi la représentation du laçage est réfléchi à chaque œillet. Le laçage américain est plus court que le laçage européen, puisque, dans chaque petit triangle (en gris), il suit un des côtés au lieu des deux autres.

colonnes d'œillets espacées verticalement d'une distance d . Deux colonnes successives sont espacées d'une distance e (nous avons réduit la valeur de e , mais la méthode fonctionne pour toutes les valeurs de d et de e). La dernière colonne représente la colonne des œillets de gauche, celle d'avant la colonne des œillets de droite, et ainsi de suite alternativement.

Les lignes polygonales zigzaguant au travers du diagramme correspondent aux laçages, mais avec un « truc » complémentaire. Partant de l'œillet du haut à gauche, on dessine le premier segment du laçage en joignant, de droite à gauche, la colonne 1 à la colonne 2, mais le segment suivant sera tracé entre les colonnes 2 et 3 au lieu de revenir de la colonne 2 à la colonne 1, comme sur une véritable chaussure : le segment réel est reflété comme si la colonne d'œillets était un miroir. On continuera ensuite de même, chaque segment étant reflété dans le miroir-colonne d'où il part. Alors le tracé zigzaguant entre deux colonnes d'œillets est remplacé par une ligne progressant toujours vers la gauche.

Les réflexions n'altérant pas la longueur d'un segment, cette représentation a exactement la même longueur que le laçage effectif qu'elle représente, avec un avantage supplémentaire toutefois : il est à présent facile de comparer les longueurs des laçages américain et européen. À part quelques segments où ils coïncident, le laçage américain décrit un côté d'un petit triangle là où le laçage européen parcourt les deux autres côtés. Comme la somme de deux côtés d'un triangle est supérieure au troisième côté, puisque la ligne droite est le plus court chemin entre deux points, le laçage américain est, à l'évidence, le plus court.



4. Pour comparer le laçage européen et le gavage, on élimine les segments communs horizontaux. Les tracés réduits, reflétés sur des miroirs horizontaux, montrent finalement que le laçage européen est le plus court.

Il n'est pas aussi manifeste que le gavage est plus long que le laçage européen. La manière la plus simple de rendre cela clair est d'éliminer des deux tracés tous les segments horizontaux (il y en a $n - 1$ dans chacun d'eux, contribuant donc, pour la même longueur, aux deux tracés) ainsi que les deux paires de segments obliques de même longueur. Il en résulte deux représentations en forme de V ; on décalera le laçage européen pour qu'il parte de l'œillet en haut à droite. Si chaque parcours est à présent « redressé » par réflexion autour de l'axe horizontal passant par la pointe du V, il est alors clair que le laçage européen est le plus court, toujours parce qu'un côté d'un triangle est plus court que la somme des deux autres.

LE PLUS COURT LAÇAGE

Ces astucieux artifices de réflexion sont plus performants qu'on ne le pense. J. Halton les utilise pour prouver que le laçage américain en zigzag est le plus court de tous les laçages possibles. Plus généralement, les laçages de chaussures et l'optique à la Fermat sont des domaines de la théorie mathématique des géodésiques, les courbes de plus court chemin, dans diverses géométries. Les réflexions dans des miroirs répondent à des questions fondamentales en physique, et elles confirment l'absolue supériorité de la méthode américaine de laçage des chaussures.