

égal à 8, comme sur la figure, $d = 1$ et $e = 2$. Les longueurs sont alors :

- américain : $2 + 14\sqrt{5} = 33,30495...$
- européen : $14 + 2\sqrt{5} + 6\sqrt{8} = 35,443...$
- gavage : $14 + 7\sqrt{5} + \sqrt{53} = 36,9325...$

Pouvons-nous être certains que le laçage américain soit toujours le plus court ? Un traitement algébrique précis montre que si d et e sont non nuls et si n est au moins égal à 4, alors les laçages sont, dans l'ordre des longueurs croissantes : l'américain, l'euro-péen et celui dénommé gavage. Si $n = 3$, l'américain est encore le plus court, mais les deux autres sont égaux. Si $n = 2$, alors les trois laçages sont de même longueur, mais qui, autre qu'un mathématicien, se préoccuperait d'un tel cas ? Cette approche algébrique est compliquée et ne nous éclaire pas sur ce qui rend tel ou tel laçage plus efficace.

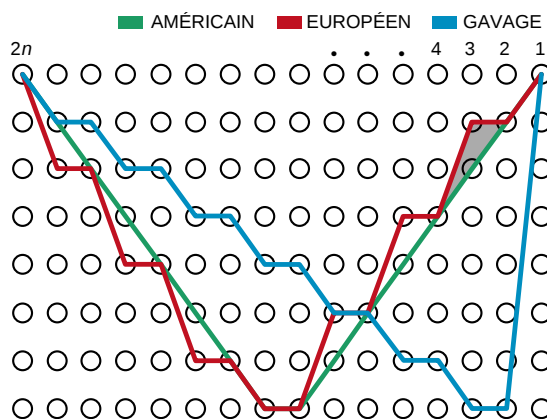
L'APPROCHE GÉOMÉTRIQUE

Attaquant le problème sous un autre angle, J. Halton observe qu'un artifice géométrique astucieux rend manifeste que le laçage américain est le plus court des trois. L'idée est inspirée de l'optique géométrique, l'étude des trajectoires des rayons lumineux.

Il y a longtemps, les mathématiciens ont découvert que la géométrie des rayons lumineux peut être rendue plus lumineuse (c'est le cas de le dire) en appliquant de judicieuses réflexions pour rendre rectilignes des trajectoires anguleuses. Par exemple, pour justifier la classique loi de la réflexion « l'angle de réflexion est égal à celui d'incidence », on examinera un rayon lumineux frappant un miroir et rebondissant sur celui-ci. Si on envisage le symétrique de la deuxième partie de la trajectoire par rapport au plan du miroir (voir la figure 2), on obtient, avec la première partie, une trajectoire perçant ce plan et pénétrant le monde d'Alice au-delà du miroir.

Suivant le principe du temps de parcours minimal, une propriété générale des rayons lumineux énoncée par Pierre de Fermat, une telle trajectoire doit atteindre son but en un temps le plus court possible, ce qui, ici, signifie qu'elle doit être un segment de droite. Dessinons la normale au miroir au point d'incidence. Alors, l'angle noté m sur la figure est égal à l'angle d'incidence i ; de plus, les deux angles marqués x sont égaux, mais $m + x = 90$ degrés, et si r est l'angle de réflexion, $r + x = 90$ degrés. Par conséquent, $m = r = i$.

J. Halton utilise une extension de ces représentations géométriques pour les trois types de laçages. Il dessine un diagramme (voir la figure 3) fait de $2N$

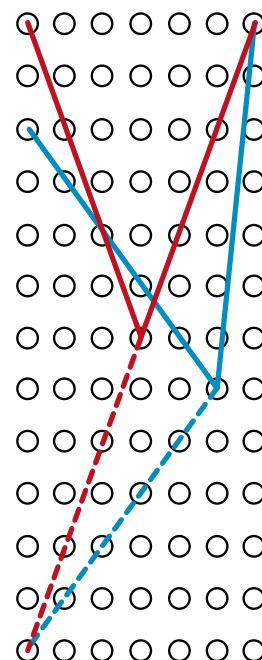


3. En utilisant la méthode de réflexion, on détermine quel est le laçage le plus court à partir de considérations géométriques. Les colonnes de numérotation impaire représentent les œillets de gauche, les colonnes paires les œillets de droite. Ainsi la représentation du laçage est réfléchi à chaque œillet. Le laçage américain est plus court que le laçage européen, puisque, dans chaque petit triangle (en gris), il suit un des côtés au lieu des deux autres.

colonnes d'œillets espacées verticalement d'une distance d . Deux colonnes successives sont espacées d'une distance e (nous avons réduit la valeur de e , mais la méthode fonctionne pour toutes les valeurs de d et de e). La dernière colonne représente la colonne des œillets de gauche, celle d'avant la colonne des œillets de droite, et ainsi de suite alternativement.

Les lignes polygonales zigzaguant au travers du diagramme correspondent aux laçages, mais avec un « truc » complémentaire. Partant de l'œillet du haut à gauche, on dessine le premier segment du laçage en joignant, de droite à gauche, la colonne 1 à la colonne 2, mais le segment suivant sera tracé entre les colonnes 2 et 3 au lieu de revenir de la colonne 2 à la colonne 1, comme sur une véritable chaussure : le segment réel est reflété comme si la colonne d'œillets était un miroir. On continuera ensuite de même, chaque segment étant reflété dans le miroir-colonne d'où il part. Alors le tracé zigzaguant entre deux colonnes d'œillets est remplacé par une ligne progressant toujours vers la gauche.

Les réflexions n'altérant pas la longueur d'un segment, cette représentation a exactement la même longueur que le laçage effectif qu'elle représente, avec un avantage supplémentaire toutefois : il est à présent facile de comparer les longueurs des laçages américain et européen. À part quelques segments où ils coïncident, le laçage américain décrit un côté d'un petit triangle là où le laçage européen parcourt les deux autres côtés. Comme la somme de deux côtés d'un triangle est supérieure au troisième côté, puisque la ligne droite est le plus court chemin entre deux points, le laçage américain est, à l'évidence, le plus court.



4. Pour comparer le laçage européen et le gavage, on élimine les segments communs horizontaux. Les tracés réduits, reflétés sur des miroirs horizontaux, montrent finalement que le laçage européen est le plus court.

Il n'est pas aussi manifeste que le gavage est plus long que le laçage européen. La manière la plus simple de rendre cela clair est d'éliminer des deux tracés tous les segments horizontaux (il y en a $n - 1$ dans chacun d'eux, contribuant donc, pour la même longueur, aux deux tracés) ainsi que les deux paires de segments obliques de même longueur. Il en résulte deux représentations en forme de V ; on décalera le laçage européen pour qu'il parte de l'œillet en haut à droite. Si chaque parcours est à présent « redressé » par réflexion autour de l'axe horizontal passant par la pointe du V, il est alors clair que le laçage européen est le plus court, toujours parce qu'un côté d'un triangle est plus court que la somme des deux autres.

LE PLUS COURT LAÇAGE

Ces astucieux artifices de réflexion sont plus performants qu'on ne le pense. J. Halton les utilise pour prouver que le laçage américain en zigzag est le plus court de tous les laçages possibles. Plus généralement, les laçages de chaussures et l'optique à la Fermat sont des domaines de la théorie mathématique des géodésiques, les courbes de plus court chemin, dans diverses géométries. Les réflexions dans des miroirs répondent à des questions fondamentales en physique, et elles confirment l'absolue supériorité de la méthode américaine de laçage des chaussures.

Démographie et sens giratoire

CHRISTOPH PÖPPE

Les relations entre les mathématiques et la biologie sont souvent tortueuses et abstraites.

J'avais encore les jambes en coton quand je montais à l'intérieur de l'Arc de Triomphe. Au volant de sa petite voiture, mon hôtesse venait de me faire traverser l'immense place Charles de Gaulle avec tant de fougue que j'avais cru ma dernière heure arrivée. Comment traverser un tel chaos et survivre ? « C'est tout simple, m'avait-elle dit, d'abord, il faut viser, et puis on tire ! »

Après ce que je venais de vivre, j'appréciais la régularité de ces escaliers. Mon mouvement aurait été périodique, s'il n'avait été superposé à un mouvement ascendant quasi linéaire.

J'étais ainsi perdu dans mes pensées, faisant l'éloge de ce qui est prévisible, lorsque l'imprévisible se produisit ! À peine avais-je posé le pied sur la terrasse ensoleillée de l'Arc de Triomphe que je vis une inconnue dont mon regard n'arrivait plus à se détacher.

Quand il s'agit d'une inconnue, on commence par la nommer (« soit x le nombre réel cherché... »). Secrète-

ment, je la nommais Heidi, à cause de ses grands yeux enfantins, à la fois craintifs et désapprobateurs, qui fixaient le grouillement de la place, en contrebas. De toute évidence, elle venait de subir une épreuve semblable à la mienne ; cela m'aida à surmonter ma timidité et à l'aborder.

La circulation automobile n'est pas un thème idéal pour lier connaissance, mais, avant même de nous en rendre compte, nous étions en grande conversation, en train de refaire le monde. Allemande, comme moi, elle aimait l'ordre et craignait ce chaos, qu'elle jugeait typiquement français, et elle pensait qu'il était possible d'y remédier. Ne pourrait-on pas, par exemple, matérialiser les couloirs de circulation et les directions à prendre par un fléchage sur la chaussée ?

« Cela ne servirait pas à grand-chose, m'empressais-je de lui répondre, tout en analysant le problème de manière fondamentale. Tu penses certainement à des flèches qui indiqueraient, en tout point

de la place et à chacun des automobilistes, la direction qu'il doit suivre.

– Oui.

– Et disposées de telle manière que deux flèches provenant de directions différentes ne conduisent pas à un même point, ou qu'elles ne partent pas d'un même point dans des directions différentes ?

– Évidemment. Il s'agit d'éviter les collisions.

– Oui, mais les automobilistes n'auraient alors plus le choix de la rue par laquelle ils doivent quitter la place.

– Comment cela ?

– La trajectoire d'une voiture est une courbe sur cette place, et une flèche représente une tangente à cette courbe. Si tu as une telle indication en tout point de cette place et si tu arrives avec ta voiture en un point quelconque, il n'y aura qu'un seul chemin possible en respectant la signalisation. »

Elle me regarda alors d'un air si curieux que je m'empressais de poursuivre mon raisonnement : « Évidemment, on pourrait déjà matérialiser la présélection sur les rues d'accès et dresser des flèches de direction au-dessus de l'ensemble de la place, pour que les véhicules qui arrivent sur une file de présélection puissent, dès le départ, se répartir en fonction de leur voie de sortie. Toutefois, si l'on applique ce principe pour chacune des rues débouchant sur la place, il devient impossible d'éviter les croisements de files, ce qui va à l'encontre de la nature même du champ de vecteurs.

– Qu'est-ce qu'un champ de vecteurs ?

– En chaque point, on trouve une indication de direction – qui constitue en fait également une indication de vitesse, mais cela n'a pas d'importance dans le cas présent. Des voitures qui suivraient un tel champ de vecteurs et qui ne pourraient pas s'éloigner à leur gré finiraient soit par tourner en rond sans fin, soit par s'approcher d'un point pour y rester bloquées. »

Heidi fronça les sourcils d'un air irrité : « Est-ce que cela signifie qu'elles vont toutes se heurter en ce point ? »

– Non, car le champ de vecteurs est continu. En s'approchant d'un point stationnaire, la vitesse des voitures se réduirait progressivement pour tendre vers zéro. Et d'ailleurs, ce sont des points... »

Je vis alors de la souffrance dans son regard, et avant que je puisse lui demander si elle se sentait mal, elle me demanda :

« Tu ne serais pas mathématicien ? »

– Si.

– C'est donc ça ! »

Que pouvais-je répondre à cela et à son expression résignée ? Silence confus...



Yann Arthus-Bertrand/Alitude

1. Une circulation sans croisements est impossible autour de l'Arc de Triomphe. Cet énoncé, démontrable mathématiquement, a des implications dans des domaines variés.