

Démographie et sens giratoire

CHRISTOPH PÖPPE

Les relations entre les mathématiques et la biologie sont souvent tortueuses et abstraites.

J'avais encore les jambes en coton quand je montais à l'intérieur de l'Arc de Triomphe. Au volant de sa petite voiture, mon hôtesse venait de me faire traverser l'immense place Charles de Gaulle avec tant de fougue que j'avais cru ma dernière heure arrivée. Comment traverser un tel chaos et survivre ? « C'est tout simple, m'avait-elle dit, d'abord, il faut viser, et puis on tire ! »

Après ce que je venais de vivre, j'appréciais la régularité de ces escaliers. Mon mouvement aurait été périodique, s'il n'avait été superposé à un mouvement ascendant quasi linéaire.

J'étais ainsi perdu dans mes pensées, faisant l'éloge de ce qui est prévisible, lorsque l'imprévisible se produisit ! À peine avais-je posé le pied sur la terrasse ensoleillée de l'Arc de Triomphe que je vis une inconnue dont mon regard n'arrivait plus à se détacher.

Quand il s'agit d'une inconnue, on commence par la nommer (« soit x le nombre réel cherché... »). Secrète-

ment, je la nommais Heidi, à cause de ses grands yeux enfantins, à la fois craintifs et désapprobateurs, qui fixaient le grouillement de la place, en contrebas. De toute évidence, elle venait de subir une épreuve semblable à la mienne ; cela m'aida à surmonter ma timidité et à l'aborder.

La circulation automobile n'est pas un thème idéal pour lier connaissance, mais, avant même de nous en rendre compte, nous étions en grande conversation, en train de refaire le monde. Allemande, comme moi, elle aimait l'ordre et craignait ce chaos, qu'elle jugeait typiquement français, et elle pensait qu'il était possible d'y remédier. Ne pourrait-on pas, par exemple, matérialiser les couloirs de circulation et les directions à prendre par un fléchage sur la chaussée ?

« Cela ne servirait pas à grand-chose, m'empressais-je de lui répondre, tout en analysant le problème de manière fondamentale. Tu penses certainement à des flèches qui indiqueraient, en tout point

de la place et à chacun des automobilistes, la direction qu'il doit suivre.

– Oui.

– Et disposées de telle manière que deux flèches provenant de directions différentes ne conduisent pas à un même point, ou qu'elles ne partent pas d'un même point dans des directions différentes ?

– Évidemment. Il s'agit d'éviter les collisions.

– Oui, mais les automobilistes n'auraient alors plus le choix de la rue par laquelle ils doivent quitter la place.

– Comment cela ?

– La trajectoire d'une voiture est une courbe sur cette place, et une flèche représente une tangente à cette courbe. Si tu as une telle indication en tout point de cette place et si tu arrives avec ta voiture en un point quelconque, il n'y aura qu'un seul chemin possible en respectant la signalisation. »

Elle me regarda alors d'un air si curieux que je m'empressais de poursuivre mon raisonnement : « Évidemment, on pourrait déjà matérialiser la présélection sur les rues d'accès et dresser des flèches de direction au-dessus de l'ensemble de la place, pour que les véhicules qui arrivent sur une file de présélection puissent, dès le départ, se répartir en fonction de leur voie de sortie. Toutefois, si l'on applique ce principe pour chacune des rues débouchant sur la place, il devient impossible d'éviter les croisements de files, ce qui va à l'encontre de la nature même du champ de vecteurs.

– Qu'est-ce qu'un champ de vecteurs ?

– En chaque point, on trouve une indication de direction – qui constitue en fait également une indication de vitesse, mais cela n'a pas d'importance dans le cas présent. Des voitures qui suivraient un tel champ de vecteurs et qui ne pourraient pas s'éloigner à leur gré finiraient soit par tourner en rond sans fin, soit par s'approcher d'un point pour y rester bloquées. »

Heidi fronça les sourcils d'un air irrité : « Est-ce que cela signifie qu'elles vont toutes se heurter en ce point ? »

– Non, car le champ de vecteurs est continu. En s'approchant d'un point stationnaire, la vitesse des voitures se réduirait progressivement pour tendre vers zéro. Et d'ailleurs, ce sont des points... »

Je vis alors de la souffrance dans son regard, et avant que je puisse lui demander si elle se sentait mal, elle me demanda :

« Tu ne serais pas mathématicien ? »

– Si.

– C'est donc ça ! »

Que pouvais-je répondre à cela et à son expression résignée ? Silence confus...



Yann Arthus-Bertrand/Alitude

1. Une circulation sans croisements est impossible autour de l'Arc de Triomphe. Cet énoncé, démontrable mathématiquement, a des implications dans des domaines variés.

DYNAMIQUE DES POPULATIONS ET SENS GIRATOIRE

Puis les traits de Heidi se détendirent. Les yeux fermés, elle laissait le soleil caresser son visage et rayonnait, comme si elle pensait à quelque chose de très beau.

«À quoi penses-tu, me hasardai-je à lui demander?

– Je rêve à une île déserte.»

Mon imagination se mit à errer. Les mers du Sud, des palmiers, le soleil, Heidi et moi...

«Terre-Neuve, au large de la côte Est du Canada, reprit-elle. C'est très isolé, et près de la moitié de l'île est couverte par la toundra, des marécages et des marais. Le sol dégèle trois mois par an environ.

– Ah bon.

– C'est très intéressant.

– Vraiment?

– Oui, car les espèces de mammifères y sont rares.»

Elle ne se laissa pas démonter par mon air dubitatif et poursuivit : «Il y a des lièvres arctiques, des lièvres américains, des caribous, des lynx et quelques autres espèces de moindre importance. On observe une variation pluriannuelle très régulière des populations de ces animaux. Chaque fois que les lièvres américains sont très nombreux, le nombre des lynx augmente l'année suivante, ce qui entraîne ensuite une diminution du nombre de lièvres américains. L'effectif des lynx décroît alors, et ce processus se répète tous les dix ans environ. Les populations de caribous et de lièvres arctiques suivent ces variations avec un léger décalage. Le plus intéressant, dans tout cela, c'est que si l'on examine des caribous morts au printemps, on constate qu'ils ont la plupart du temps été mordus par des lynx (voir *Changement de proie dans un écosystème simple*, par Arthur Bergerud, *Pour la Science*, février 1984).

– Et ça te plaît d'aller disséquer des caribous morts dans les étendues glacées de Terre-Neuve?

– Mais oui! On a même remarqué que certains abcès purulents...

– Tu ne serais pas biologiste?

– Si.

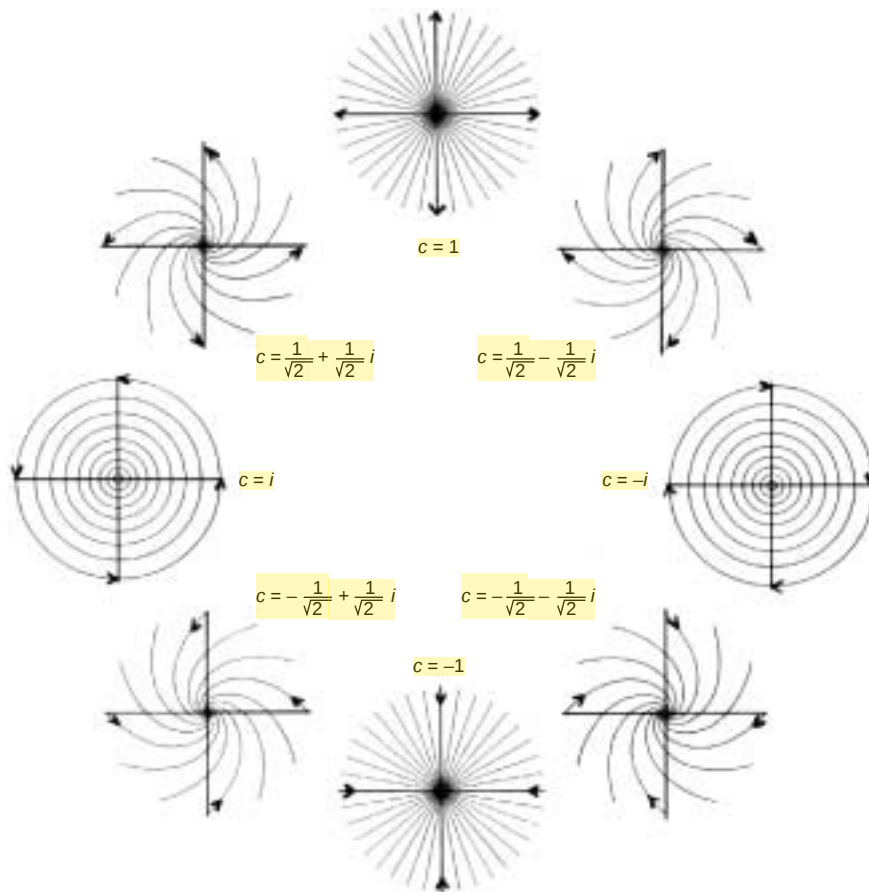
– C'est donc ça!»

À nouveau, silence confus. Je cherchai désespérément un sujet de conversation favorable.

Tout d'un coup, une idée me vint : «Mais c'est la même chose que les voitures autour de nous!»

Manifestement, Heidi ne comprenait pas.

«Mais si, poursuivis-je. Tu m'as dit toi-même que seuls les lynx et ces petits lièvres étaient importants.



Wilhelm Scharnowell

2. Courbes intégrales du champ de vecteurs complexe $u(z) = cz$ pour différentes valeurs de c . La position de chacune des figures obtenues dépend des coordonnées du point c dans le plan complexe. Contrairement à l'habitude, l'axe réel est ici dirigé vers le haut. Lorsque c varie le long de la circonférence d'un cercle, l'étoile prend la forme de spirales logarithmiques qui deviennent de plus en plus serrées jusqu'à former une famille de cercles.

– Le lièvre américain *Lepus americanus*, s'il te plaît, à ne pas confondre avec le lièvre arctique *Lepus arcticus*. Mais à part cela, c'est vrai.

– Et bien voilà! Puisque tu connais le nombre de lynx x et le nombre de lièvres y , tu peux marquer un point (x,y) dans un système de coordonnées.

– Ah...»

De nouveau, ce regard de madone douloureuse me poussa à enchaîner sans attendre :

«L'état de ton système est alors représenté par un point dans un plan – ou par deux nombres réels, ce qui revient au même. On détermine facilement le mouvement de ce point, qui représente l'état de la population animale, car je pense que si les lynx mangent les lièvres, l'inverse n'est pas vrai.

– Bravo!

– Et si les lièvres ne se font pas manger, ils vont se multiplier comme des lapins.

– Non, car leur comportement sexuel est très différent.

– Je voulais simplement dire que l'augmentation de leur effectif est pro-

portionnelle à leur nombre. Ce qui veut dire qu'en chaque point correspondant à un temps donné, la dérivée temporelle sera proportionnelle à ce nombre lui-même.

– La dérivée temporelle?

– Oui, le truc classique, $y(t+h)$ moins $y(t)$, divisé par h . Et ensuite, on fait tendre la valeur limite de h vers zéro.

– Tu veux dire que les lièvres d'aujourd'hui moins les lièvres d'hier, divisés par un jour, cela nous donne le nombre de lièvres nés par jour?

– Exactement. Et en plus, y dépend de manière continue de t , d'où $y(t+h)$ tend vers $y(t)$ lorsque h tend vers zéro, ce qui fait que le numérateur et le dénominateur de cette équation tendent tous deux vers une valeur infinitésimale, et alors tout dépendra de la valeur limite du quotient...

– Tendent vers une valeur infinitésimale? Comment vois-tu les choses? En millilièvres par seconde?

– C'est à peu près ça.»

Regard dévastateur :

«J'en étais sûre. les mathématiques ne sont que des bêtises. Un lièvre naît ou il ne naît pas. Je n'ai jamais entendu