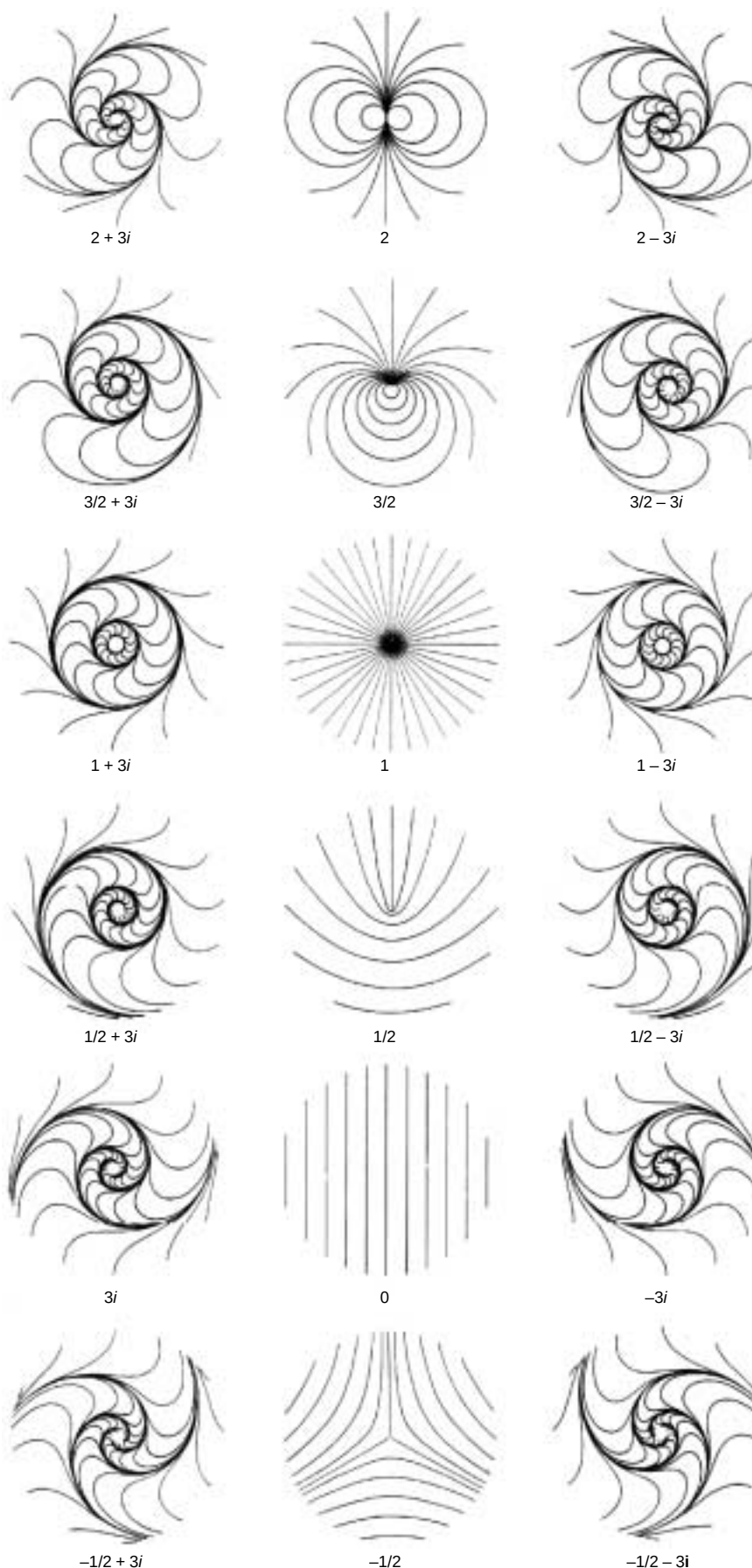




Wilhelm Scharnowell

3. Diagrammes de la fonction complexe $u(z) = z^n$ pour différentes valeurs de l'exposant n . Cette valeur est indiquée pour chacune des figures obtenues.

parler d'une hase qui serait un tout petit peu enceinte!

– Ne prends pas le formalisme à la lettre. Imagine qu'il y ait un grand nombre de lièvres. Un de plus ou de moins ne fera pas grande différence. À ce stade, on ne peut plus juger si la population évolue de manière continue ou par incréments.

– Bon, je veux bien, mais pourquoi tenir des raisonnements si déroutants?

– Parce qu'on peut alors décrire tous les facteurs importants en termes mathématiques : reproduction, mort de faim, capture par un prédateur, prolifération des survivants...

– Mais ce n'est pas en se faisant dévorer qu'un lièvre fait plus de petits.

– Certainement pas, mais quand la nourriture est plus abondante, les portées sont plus nombreuses.

– D'accord, mais tout dépend aussi de la probabilité avec laquelle les lynx attrapent les lièvres. Comment peux-tu prédire de manière exacte combien de millièmes de lynx vont naître en plus par seconde grâce à la consommation de lièvres?

– Je ne peux pas le dire de manière précise, mais, de nouveau, ces effets de hasard se compensent lorsqu'on considère des populations importantes. C'est pourquoi l'on peut dire avec certitude qu'il suffit de connaître l'état des populations à un instant pour pouvoir prévoir comment les populations évoluent ensuite. C'est ce qu'on appelle une équation différentielle : à chaque état est associée une indication définissant l'évolution de cet état à l'instant suivant. Ou en termes géométriques : à chaque point du plan est associé une flèche de direction.»

On devinait le combat intérieur que se livrait Heidi. Devait-elle prendre mes paroles au sérieux? En tout cas, elle sembla prête à suivre ce raisonnement, du moins provisoirement. Elle enchaîna, en effet : «Si maintenant les lynx sont rares et les lièvres nombreux, alors x est petit et y grand, et l'état du système sera décrit par un point situé en haut dans un système de coordonnées. Si tel est le cas, les lynx disposeront d'une nourriture abondante et se multiplieront, de sorte que le nombre des lièvres diminuera en conséquence. Et, si je comprends bien, il pendra de ce point une flèche dirigée en bas à droite.

– C'est tout à fait ça! Les flèches sont nommées des vecteurs, et l'ensemble des flèches forme un champ de vecteurs. Tout cela n'est qu'un détail terminologique.

– Me voilà bien avancée, qu'est-ce que j'en tire?

– Peut-être une solution de l'équation différentielle, qui constituerait une prévision de l'évolution de la population. Ou,

du moins, une représentation générale de celle-ci.

– Comment cela ? N'y a-t-il pas toujours une solution à cette équation ?

– Si. Le principe d'existence pour le problème de la valeur initiale dans le cas des équations différentielles ordinaires à terme lipschitzien...»

De nouveau, ce regard douloureux. J'avalai en vitesse le reste de ma phrase et lui dis : «Il y a généralement une solution, mais, la plupart du temps, on ne peut pas la calculer à l'aide de formules. Le problème est de dessiner dans le plan une courbe ayant son origine en un point donné, de sorte que sa tangente en tout point corresponde à la flèche de direction de ce point.

– Ah bon ! C'est comme si les voitures devaient suivre la flèche de direction. Ce n'est pourtant pas très difficile !

– Plus que tu ne le penses. Tu dois imaginer qu'une telle flèche est associée à chaque point. C'est-à-dire que, dès que tu suis la direction indiquée sur une distance infiniment petite, c'est de nouveau une autre direction qui s'impose. Ce n'est possible que si les directions ne changent pas brusquement d'un point à un autre.

– Et qu'est-ce que ça donne, comme courbes ?

– Cela dépend. Imagine que toutes les flèches pointent vers un lieu précis. Les courbes convergeront alors, elles aussi, vers ce point, et une voiture, par exemple, sera alors attirée vers ce point comme par un aimant. Lorsqu'on trace de telles courbes, on obtient une série de lignes qui rappelle les lignes de champ d'un aimant. Un tel point s'appelle un attracteur (voir le bas de la figure 2).

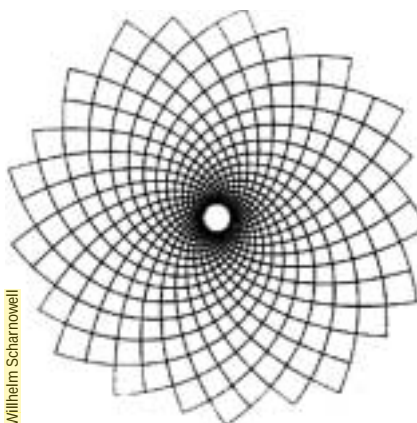
– Mais aucune force ne provient de ce point.

– Ce n'est pas indispensable, lui dis-je, histoire de faire avancer notre aventure. On peut se sentir attiré par quelqu'un sans que ce quelqu'un vous tire à lui.»

ATTRACTEURS ET PANNEAUX STOP

«Ben voyons, s'exclama une jeune femme qui nous avait écoutés ; les moustiques sont bien attirés par les lampadaires. Et le serpent jarretière à flancs rouges : à peine une femelle sort-elle de son trou qu'elle répand une phéromone et que les mâles se précipitent sur elle par centaines pour essayer de s'accoupler (voir *Pour la Science*, janvier 1983, p. 68).»

Heidi passait apparemment ses vacances avec un collègue. Pour me tirer d'embarras, il fallait vite que je trouve un autre exemple : «Suppose que tu viennes de descendre d'une rame de métro et que tu cherches la sortie. Tu vas



Wilhelm Schiarnowell

4. Paire de familles de courbes orthogonales pour les champs de vecteurs cz et icz avec $c = 1 + i(\sqrt{5} - 1)/2$. La même figure peut être interprétée comme les quatre familles de courbes de $u(z) = \sqrt[4]{c^4 z^4}$, et dont seulement deux se distinguent par leur sens de passage.

alors suivre le premier panneau *Sortie* : tu peux définir un tel panneau comme un attracteur, mais pas de manière absolue, car tu ne restes à l'arrêt que de manière transitoire devant lui.

– Mais il existe généralement plusieurs sorties.

– Dans ce cas, le champ de vecteurs qui décrit ton mouvement possède plusieurs attracteurs. Représente-toi un paysage vallonné où chaque point est associé à une flèche qui indique la direction de plus grande pente. Voilà qui constitue notre champ de vecteurs. Prenons maintenant une boule qui roule vers le bas dans ce paysage : elle suivra la courbe intégrale de l'équation différentielle. Tous les points les plus bas où elle s'arrêtera, faute de pente dans toutes les directions, pourront être définis comme des attracteurs.

– Et si on la pose très délicatement sur un sommet ?

– Elle reste sur place, car le sommet est un point stationnaire, mais pas un attracteur : dès qu'on la déplace légèrement, elle se met à rouler.

– Bon, je veux bien, mais lorsque la courbe est dirigée vers un attracteur, emprunte-t-elle le chemin le plus court ?

– Pas forcément. On peut tout à fait envisager que les flèches ne soient pas directement dirigées vers l'attracteur, mais qu'elles en dévient d'un certain angle. La courbe décrit alors une spirale qui vient se terminer sur l'attracteur. Si l'on augmente cet angle jusqu'à une valeur de 90 degrés, les spirales se transforment en une série de cercles concentriques.

– Des cercles ?

– Oui : tu décris un cercle lorsque tu cours toujours de manière perpendiculaire à la direction qui vise un point défini.

– Ça, je le savais !

– Qu'il s'agisse de spirales divergentes ou convergentes, toute cette famille de courbes peut être décrite par une formule unique où l'on fait varier la valeur de l'angle (voir la figure 2).

– Et de quel type est la flèche qui est associée à ce point attracteur central ?

– Une flèche de longueur zéro. Un panneau *Stop*, en quelque sorte.

– Et quand toutes les flèches s'éloignent de lui ?

– Encore un panneau *Stop*.

– Ainsi, il existerait des panneaux *Stop* qui fonctionnent par attraction et d'autres par répulsion ?

– D'une certaine manière. Il en existe même qui sont attracteurs sur les côtés, mais qui repoussent devant et derrière, un peu comme un col entre deux montagnes. D'autres encore possèdent de nombreux secteurs dont certains attirent et d'autres repoussent.»

Heidi me regarda, comme si elle doutait de ma santé mentale, alors qu'il aurait été si simple de calculer la valeur de l'angle à proximité du point zéro entre z et $u(z) = z^3$ et de vérifier qu'effectivement il variait alternativement en étant tantôt plus petit et tantôt plus grand que 90 degrés. Je lui épargnai cette explication.

«C'est bizarre, dit Heidi. Qu'advient-il alors des courbes intégrales ?

– Elles prennent leur source au point critique...

– Au quoi ?

– Au niveau du panneau *Stop* à plusieurs côtés, et elles partent dans des directions divergentes vers l'extérieur pour faire demi-tour et revenir en direction du même point – à moins qu'il n'existe d'autres panneaux *Stop*. Le résultat final ressemble à une fleur avec des pétales (voir la figure 5).»

À cette évocation poétique, les deux biologistes s'intéressèrent de nouveau à mes considérations mathématiques. Je profitais de ce regain d'intérêt pour amener un autre exemple : «Il existe également des familles de courbes qui ressemblent à une coquille d'escargot ou au dessin des graines d'un tournesol (voir les figures 3 et 5).

– Ah oui... Et les feuilles ou les coquilles d'escargots poussent-elles en suivant de telles lois de formation ?»

C'était exactement la question qu'il ne fallait pas me poser : il existe certes des formules mathématiques qui engendrent une foule de courbes très jolies dont certaines rappellent des formes biologiques, mais il n'existe pas de corrélation directe entre les formes mathématiques et les formes biologiques qui leur ressemblent. Non pas qu'on ne puisse appliquer des formules mathématiques pour

expliquer la forme de la coquille d'un escargot, mais le problème est bien plus compliqué que la recherche d'un champ de vecteurs dans un plan.

D'autre part, et indépendamment, les équations différentielles constituent un thème central des mathématiques. On y cherche, par exemple, à déterminer la forme du champ de vecteurs bidi-

mensionnel et celle de leurs courbes intégrales. Elles servent d'exemples pour de nombreux systèmes complexes, mais pas pour leurs qualités esthétiques, car de belles images apportent rarement la gloire en mathématiques!

Il est d'ailleurs significatif que l'on doive les plus belles collections de telles figures non pas à des mathématiciens, mais à

des personnes telles que Wilhelm Scharnowell (1922-1991), qui était ingénieur à Dortmund (Allemagne), ainsi qu'à Friedrich Zauner, professeur en retraite à Villach (Autriche), et à son fils Erhard Zauner. Nous ne pouvons montrer ici qu'une toute petite sélection choisie parmi le grand nombre de figures qu'ils ont tracées au cours de dizaines d'années de travail.

Diagrammes de fonctions complexes d'après Friedrich Zauner et Wilhelm Scharnowell

Un champ de vecteurs bidimensionnel est une paire de fonctions (f, g) de deux variables qui associent un point du plan $(f(x, y), g(x, y))$ à chaque point (x, y) . À chaque champ de vecteurs correspond un système d'équations différentielles qui s'écrit :

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y).\end{aligned}$$

On peut considérer le point $(f(x, y), g(x, y))$ comme un vecteur qui prend son origine au point (x, y) . Une solution de l'équation différentielle est constituée par une courbe dont les tangentes sont ces vecteurs.

Deux nombres réels peuvent toujours être regroupés en un nombre complexe que l'on écrit sous la forme $z = (x, y)$ ou bien $z = x + iy$: x est la partie réelle et y la partie imaginaire du nombre z . De la même manière, on peut contracter les composantes f et g d'un champ de vecteurs en une fonction complexe $u(z) = f(x, y) + ig(x, y)$. Le nombre i , l'unité imaginaire, est égal à la racine carrée de -1 .

Ce regroupement formel est intéressant parce qu'il permet de multiplier des nombres complexes comme s'il s'agissait de nombres réels. On calcule avec ces nombres presque comme d'habitude, tout en observant que $i^2 = -1$.

Chaque nombre complexe a deux racines carrées, de signes opposés ; les vecteurs qui leur correspondent dans le plan sont de longueur égale et dans des directions opposées. Chaque nombre complexe possède trois racines cubiques, quatre racines quadruples, etc. Les vecteurs qui correspondent à ces racines d'ordre n sont également de même longueur, et leurs extrémités forment un polygone régulier à n côtés.

Ce mode d'écriture complexe permet de se concentrer sur des champs de vecteurs $u(z)$ que l'on peut décrire sans prendre en compte la partie imaginaire et la partie réelle de u ou de z . Il s'agit en règle générale de fonctions dites analytiques qui ont des comportements intéressants. Ces « diagrammes de fonctions analytiques » ne représentent pas complètement la fonction analytique (cela est impossible, car il faudrait disposer d'un espace à quatre dimensions), mais des courbes intégrales (la représentation graphique) de l'équation différentielle dont le champ de vecteurs constitue la fonction analytique. Par chaque point du plan passe une telle courbe intégrale ; il s'agit par conséquent d'effectuer le bon choix, quand on crée un programme informatique. Les critères pour y parvenir sont multiples : les courbes ne doivent par exemple pas être trop resserrées ni trop dispersées (ce qui n'est pas toujours facile à obtenir en raison de leur tendance à se concentrer en certains points), et l'image d'ensemble doit refléter les symétries du champ de vecteurs. De telles exigences sont difficiles à formaliser dans un programme informatique ; il serait en effet extrêmement difficile de déléguer à un ordinateur l'énorme travail manuel qui se cache derrière ces images (environ huit heures pour un diagramme de difficulté moyenne).

Pour des raisons esthétiques, l'axe réel (qui constitue le plus souvent l'axe de symétrie) des diagrammes de Zauner et de Scharnowell n'est pas dirigé vers la droite, mais plutôt vers le haut.

Une courbe intégrale ne donne pas une image complète de la solution d'une équation différentielle, car la vitesse et la direction correspondant à ces courbes ne sont pas indiquées. Un tel défaut devient un avantage pour certaines images qui sont fondées non pas sur une seule fonction, mais sur plusieurs. Si l'on doit, par exemple, extraire une racine pour des exposants demi-entiers (*deuxième, quatrième et sixième lignes sur la figure 3*), à chaque point du plan seront attachés deux vecteurs dirigés en sens contraire. Cela est admissible, car la courbe intégrale est dirigée de manière tangentielle par rapport aux deux vecteurs. Une racine cubique donnera naissance à trois familles de courbes qui se recoupent en chaque point avec un angle de 120 degrés.

Des formules telles que z^{1+3i} ne sont pas seulement à double sens comme la racine carrée, mais à sens multiple et infini. Les puissances d'exposant complexe sont en effet définies par la fonction exponentielle complexe et sa fonction inverse – le logarithme complexe : $z^{1+3i} = \exp((1+3i) \ln z)$. Dans le plan complexe, il existe un nombre infini de fonctions inverses possibles de la fonction exponentielle. Il n'est donc pas possible de décider dès le départ quel est le logarithme qu'il faudra appliquer parmi les nombreux possibles. C'est pour cette raison que l'on obtient un nombre infini de familles de courbes qui se retrouvent superposées : l'ambiguïté existe uniquement sur la vitesse et non sur la direction, ce qui permet d'obtenir malgré tout une image homogène.

Lorsqu'on fait pivoter de 90 degrés tous les vecteurs d'un champ de vecteurs (ce qui correspond à la multiplication par i), on obtient un nouveau champ de vecteurs. Ses courbes intégrales coupent toujours à angle droit celles de l'ancien champ de vecteurs, comme le montre la figure 5. Lorsque le champ de vecteurs est un champ de potentiel, comme dans une région de montagnes, les courbes de niveau de ce paysage de collines sont toujours perpendiculaires aux courbes intégrales du champ de vecteurs. Si l'on combine les deux principes ainsi énoncés, les familles de courbes pourront être représentées par des courbes de niveau. Ceci constitue une aide précieuse, car il est relativement aisé de programmer un ordinateur pour colorer des points situés à la même hauteur (ou appartenant à une zone de hauteur définie).

Le choix approprié de la fonction $u(z)$ permet d'obtenir des courbes aux propriétés données. Si l'on désire avoir un point critique en un point a du plan, il suffira de donner à u une valeur nulle en ce point. On y parvient en remplaçant z par $z - a$ dans la fonction u . Une symétrie dans la loi de formation se traduit généralement par une symétrie dans la famille de courbes.