

expliquer la forme de la coquille d'un escargot, mais le problème est bien plus compliqué que la recherche d'un champ de vecteurs dans un plan.

D'autre part, et indépendamment, les équations différentielles constituent un thème central des mathématiques. On y cherche, par exemple, à déterminer la forme du champ de vecteurs bidi-

mensionnel et celle de leurs courbes intégrales. Elles servent d'exemples pour de nombreux systèmes complexes, mais pas pour leurs qualités esthétiques, car de belles images apportent rarement la gloire en mathématiques!

Il est d'ailleurs significatif que l'on doive les plus belles collections de telles figures non pas à des mathématiciens, mais à

des personnes telles que Wilhelm Scharnowell (1922-1991), qui était ingénieur à Dortmund (Allemagne), ainsi qu'à Friedrich Zauner, professeur en retraite à Villach (Autriche), et à son fils Erhard Zauner. Nous ne pouvons montrer ici qu'une toute petite sélection choisie parmi le grand nombre de figures qu'ils ont tracées au cours de dizaines d'années de travail.

Diagrammes de fonctions complexes d'après Friedrich Zauner et Wilhelm Scharnowell

Un champ de vecteurs bidimensionnel est une paire de fonctions (f, g) de deux variables qui associent un point du plan $(f(x, y), g(x, y))$ à chaque point (x, y) . À chaque champ de vecteurs correspond un système d'équations différentielles qui s'écrit :

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y).\end{aligned}$$

On peut considérer le point $(f(x, y), g(x, y))$ comme un vecteur qui prend son origine au point (x, y) . Une solution de l'équation différentielle est constituée par une courbe dont les tangentes sont ces vecteurs.

Deux nombres réels peuvent toujours être regroupés en un nombre complexe que l'on écrit sous la forme $z = (x, y)$ ou bien $z = x + iy$: x est la partie réelle et y la partie imaginaire du nombre z . De la même manière, on peut contracter les composants f et g d'un champ de vecteurs en une fonction complexe $u(z) = f(x, y) + ig(x, y)$. Le nombre i , l'unité imaginaire, est égal à la racine carrée de -1 .

Ce regroupement formel est intéressant parce qu'il permet de multiplier des nombres complexes comme s'il s'agissait de nombres réels. On calcule avec ces nombres presque comme d'habitude, tout en observant que $i^2 = -1$.

Chaque nombre complexe a deux racines carrées, de signes opposés ; les vecteurs qui leur correspondent dans le plan sont de longueur égale et dans des directions opposées. Chaque nombre complexe possède trois racines cubiques, quatre racines quadruples, etc. Les vecteurs qui correspondent à ces racines d'ordre n sont également de même longueur, et leurs extrémités forment un polygone régulier à n côtés.

Ce mode d'écriture complexe permet de se concentrer sur des champs de vecteurs $u(z)$ que l'on peut décrire sans prendre en compte la partie imaginaire et la partie réelle de u ou de z . Il s'agit en règle générale de fonctions dites analytiques qui ont des comportements intéressants. Ces « diagrammes de fonctions analytiques » ne représentent pas complètement la fonction analytique (cela est impossible, car il faudrait disposer d'un espace à quatre dimensions), mais des courbes intégrales (la représentation graphique) de l'équation différentielle dont le champ de vecteurs constitue la fonction analytique. Par chaque point du plan passe une telle courbe intégrale ; il s'agit par conséquent d'effectuer le bon choix, quand on crée un programme informatique. Les critères pour y parvenir sont multiples : les courbes ne doivent par exemple pas être trop resserrées ni trop dispersées (ce qui n'est pas toujours facile à obtenir en raison de leur tendance à se concentrer en certains points), et l'image d'ensemble doit refléter les symétries du champ de vecteurs. De telles exigences sont difficiles à formaliser dans un programme informatique ; il serait en effet extrêmement difficile de déléguer à un ordinateur l'énorme travail manuel qui se cache derrière ces images (environ huit heures pour un diagramme de difficulté moyenne).

Pour des raisons esthétiques, l'axe réel (qui constitue le plus souvent l'axe de symétrie) des diagrammes de Zauner et de Scharnowell n'est pas dirigé vers la droite, mais plutôt vers le haut.

Une courbe intégrale ne donne pas une image complète de la solution d'une équation différentielle, car la vitesse et la direction correspondant à ces courbes ne sont pas indiquées. Un tel défaut devient un avantage pour certaines images qui sont fondées non pas sur une seule fonction, mais sur plusieurs. Si l'on doit, par exemple, extraire une racine pour des exposants demi-entiers (*deuxième, quatrième et sixième lignes sur la figure 3*), à chaque point du plan seront attachés deux vecteurs dirigés en sens contraire. Cela est admissible, car la courbe intégrale est dirigée de manière tangentielle par rapport aux deux vecteurs. Une racine cubique donnera naissance à trois familles de courbes qui se recoupent en chaque point avec un angle de 120 degrés.

Des formules telles que z^{1+3i} ne sont pas seulement à double sens comme la racine carrée, mais à sens multiple et infini. Les puissances d'exposant complexe sont en effet définies par la fonction exponentielle complexe et sa fonction inverse – le logarithme complexe : $z^{1+3i} = \exp((1+3i) \ln z)$. Dans le plan complexe, il existe un nombre infini de fonctions inverses possibles de la fonction exponentielle. Il n'est donc pas possible de décider dès le départ quel est le logarithme qu'il faudra appliquer parmi les nombreux possibles. C'est pour cette raison que l'on obtient un nombre infini de familles de courbes qui se retrouvent superposées : l'ambiguïté existe uniquement sur la vitesse et non sur la direction, ce qui permet d'obtenir malgré tout une image homogène.

Lorsqu'on fait pivoter de 90 degrés tous les vecteurs d'un champ de vecteurs (ce qui correspond à la multiplication par i), on obtient un nouveau champ de vecteurs. Ses courbes intégrales coupent toujours à angle droit celles de l'ancien champ de vecteurs, comme le montre la figure 5. Lorsque le champ de vecteurs est un champ de potentiel, comme dans une région de montagnes, les courbes de niveau de ce paysage de collines sont toujours perpendiculaires aux courbes intégrales du champ de vecteurs. Si l'on combine les deux principes ainsi énoncés, les familles de courbes pourront être représentées par des courbes de niveau. Ceci constitue une aide précieuse, car il est relativement aisé de programmer un ordinateur pour colorer des points situés à la même hauteur (ou appartenant à une zone de hauteur définie).

Le choix approprié de la fonction $u(z)$ permet d'obtenir des courbes aux propriétés données. Si l'on désire avoir un point critique en un point a du plan, il suffira de donner à u une valeur nulle en ce point. On y parvient en remplaçant z par $z - a$ dans la fonction u . Une symétrie dans la loi de formation se traduit généralement par une symétrie dans la famille de courbes.