

expliquer la forme de la coquille d'un escargot, mais le problème est bien plus compliqué que la recherche d'un champ de vecteurs dans un plan.

D'autre part, et indépendamment, les équations différentielles constituent un thème central des mathématiques. On y cherche, par exemple, à déterminer la forme du champ de vecteurs bidi-

mensionnel et celle de leurs courbes intégrales. Elles servent d'exemples pour de nombreux systèmes complexes, mais pas pour leurs qualités esthétiques, car de belles images apportent rarement la gloire en mathématiques!

Il est d'ailleurs significatif que l'on doive les plus belles collections de telles figures non pas à des mathématiciens, mais à

des personnes telles que Wilhelm Scharnowell (1922-1991), qui était ingénieur à Dortmund (Allemagne), ainsi qu'à Friedrich Zauner, professeur en retraite à Villach (Autriche), et à son fils Erhard Zauner. Nous ne pouvons montrer ici qu'une toute petite sélection choisie parmi le grand nombre de figures qu'ils ont tracées au cours de dizaines d'années de travail.

Diagrammes de fonctions complexes d'après Friedrich Zauner et Wilhelm Scharnowell

Un champ de vecteurs bidimensionnel est une paire de fonctions (f, g) de deux variables qui associent un point du plan $(f(x, y), g(x, y))$ à chaque point (x, y) . À chaque champ de vecteurs correspond un système d'équations différentielles qui s'écrit :

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y).\end{aligned}$$

On peut considérer le point $(f(x, y), g(x, y))$ comme un vecteur qui prend son origine au point (x, y) . Une solution de l'équation différentielle est constituée par une courbe dont les tangentes sont ces vecteurs.

Deux nombres réels peuvent toujours être regroupés en un nombre complexe que l'on écrit sous la forme $z = (x, y)$ ou bien $z = x + iy$: x est la partie réelle et y la partie imaginaire du nombre z . De la même manière, on peut contracter les composants f et g d'un champ de vecteurs en une fonction complexe $u(z) = f(x, y) + ig(x, y)$. Le nombre i , l'unité imaginaire, est égal à la racine carrée de -1 .

Ce regroupement formel est intéressant parce qu'il permet de multiplier des nombres complexes comme s'il s'agissait de nombres réels. On calcule avec ces nombres presque comme d'habitude, tout en observant que $i^2 = -1$.

Chaque nombre complexe a deux racines carrées, de signes opposés ; les vecteurs qui leur correspondent dans le plan sont de longueur égale et dans des directions opposées. Chaque nombre complexe possède trois racines cubiques, quatre racines quadruples, etc. Les vecteurs qui correspondent à ces racines d'ordre n sont également de même longueur, et leurs extrémités forment un polygone régulier à n côtés.

Ce mode d'écriture complexe permet de se concentrer sur des champs de vecteurs $u(z)$ que l'on peut décrire sans prendre en compte la partie imaginaire et la partie réelle de u ou de z . Il s'agit en règle générale de fonctions dites analytiques qui ont des comportements intéressants. Ces « diagrammes de fonctions analytiques » ne représentent pas complètement la fonction analytique (cela est impossible, car il faudrait disposer d'un espace à quatre dimensions), mais des courbes intégrales (la représentation graphique) de l'équation différentielle dont le champ de vecteurs constitue la fonction analytique. Par chaque point du plan passe une telle courbe intégrale ; il s'agit par conséquent d'effectuer le bon choix, quand on crée un programme informatique. Les critères pour y parvenir sont multiples : les courbes ne doivent par exemple pas être trop resserrées ni trop dispersées (ce qui n'est pas toujours facile à obtenir en raison de leur tendance à se concentrer en certains points), et l'image d'ensemble doit refléter les symétries du champ de vecteurs. De telles exigences sont difficiles à formaliser dans un programme informatique ; il serait en effet extrêmement difficile de déléguer à un ordinateur l'énorme travail manuel qui se cache derrière ces images (environ huit heures pour un diagramme de difficulté moyenne).

Pour des raisons esthétiques, l'axe réel (qui constitue le plus souvent l'axe de symétrie) des diagrammes de Zauner et de Scharnowell n'est pas dirigé vers la droite, mais plutôt vers le haut.

Une courbe intégrale ne donne pas une image complète de la solution d'une équation différentielle, car la vitesse et la direction correspondant à ces courbes ne sont pas indiquées. Un tel défaut devient un avantage pour certaines images qui sont fondées non pas sur une seule fonction, mais sur plusieurs. Si l'on doit, par exemple, extraire une racine pour des exposants demi-entiers (*deuxième, quatrième et sixième lignes sur la figure 3*), à chaque point du plan seront attachés deux vecteurs dirigés en sens contraire. Cela est admissible, car la courbe intégrale est dirigée de manière tangentielle par rapport aux deux vecteurs. Une racine cubique donnera naissance à trois familles de courbes qui se recoupent en chaque point avec un angle de 120 degrés.

Des formules telles que z^{1+3i} ne sont pas seulement à double sens comme la racine carrée, mais à sens multiple et infini. Les puissances d'exposant complexe sont en effet définies par la fonction exponentielle complexe et sa fonction inverse – le logarithme complexe : $z^{1+3i} = \exp((1+3i) \ln z)$. Dans le plan complexe, il existe un nombre infini de fonctions inverses possibles de la fonction exponentielle. Il n'est donc pas possible de décider dès le départ quel est le logarithme qu'il faudra appliquer parmi les nombreux possibles. C'est pour cette raison que l'on obtient un nombre infini de familles de courbes qui se retrouvent superposées : l'ambiguïté existe uniquement sur la vitesse et non sur la direction, ce qui permet d'obtenir malgré tout une image homogène.

Lorsqu'on fait pivoter de 90 degrés tous les vecteurs d'un champ de vecteurs (ce qui correspond à la multiplication par i), on obtient un nouveau champ de vecteurs. Ses courbes intégrales coupent toujours à angle droit celles de l'ancien champ de vecteurs, comme le montre la figure 5. Lorsque le champ de vecteurs est un champ de potentiel, comme dans une région de montagnes, les courbes de niveau de ce paysage de collines sont toujours perpendiculaires aux courbes intégrales du champ de vecteurs. Si l'on combine les deux principes ainsi énoncés, les familles de courbes pourront être représentées par des courbes de niveau. Ceci constitue une aide précieuse, car il est relativement aisé de programmer un ordinateur pour colorer des points situés à la même hauteur (ou appartenant à une zone de hauteur définie).

Le choix approprié de la fonction $u(z)$ permet d'obtenir des courbes aux propriétés données. Si l'on désire avoir un point critique en un point a du plan, il suffira de donner à u une valeur nulle en ce point. On y parvient en remplaçant z par $z - a$ dans la fonction u . Une symétrie dans la loi de formation se traduit généralement par une symétrie dans la famille de courbes.

F. Zauner, E. Zauner et E. Scharnowell ont justement établi cette relation entre les mathématiques et le monde vivant que l'on aimerait tant voir, mais qui n'existe pas si l'on se fonde sur les mathématiques et la biologie. Ils se sont appuyés sur une conception de l'Univers qui s'oppose en de nombreux points à la pensée des naturalistes : l'anthroposophie du philosophe Rudolf Steiner (1861-1925). Scharnowell a ainsi commenté ses dessins (voir la figure 3) :

«Ce qui se passe à droite et à gauche de la médiane verticale est déterminé par une rotation à droite et par une rotation

à gauche, c'est-à-dire déterminé par une polarité droite-gauche... Nous retrouvons également une telle polarité droite-gauche dans la silhouette humaine sous la forme de la symétrie droite-gauche par rapport à un miroir... Au-dessus et au-dessous de la "ligne des étoiles", l'aspect de la figure dépend d'une polarité intérieur-extérieur qui s'exprime sous la forme de courbes sortantes et rentrantes. Cette polarité s'exprime chez l'homme, au-dessus et au-dessous de la ligne de cœur, sous la forme de l'homme des sens et des nerfs (centré au niveau de la tête) et de l'homme du métabolisme et des

membres (dont le centre est situé dans le bas-ventre). Nous trouverons ainsi dans la partie supérieure une tendance à des formes sortantes matérialisées au niveau du crâne par les formations osseuses qui l'entourent, alors que la partie inférieure du corps présente ce mouvement de calice ouvert vers l'extérieur sous la forme du creux du corps qui accueille les organes de la nutrition ainsi que les organes d'excrétion et de reproduction.»

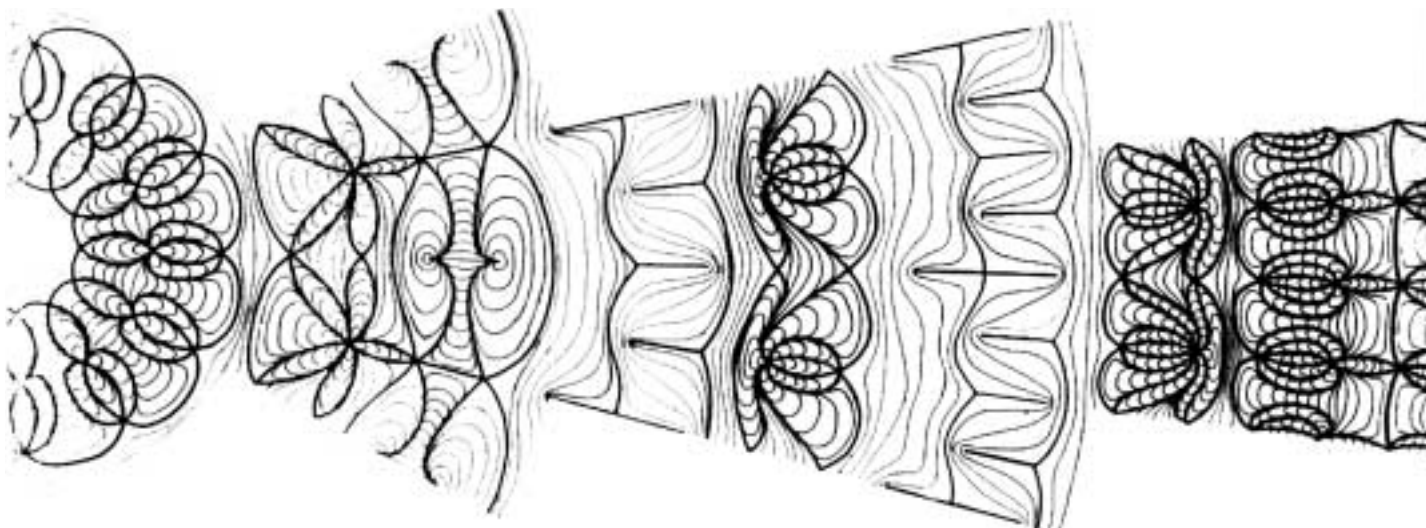
J'essayai prudemment d'intéresser Heidi à ces idées, tout en lui faisant remarquer que j'avais chez moi une collection de ces images vraiment admirables, et



Wilhelm Scharnowell

5. Familles de courbes intégrales de champs de vecteurs complexes. En haut à gauche : $iz^{3/2}(z-5)^{1/2}$. En haut à droite : $z^{5/4+3i}$. En bas à gauche : $z^{7/4}$. Le dernier diagramme comporte deux

familles de courbes orthogonales (superposées) associées au champ de vecteurs $z^{7/2}(z^5-5^5)^{3/2}$ et au même champ multiplié par i . La coloration fait ressortir les symétries engendrées par ces formules.



6. La fonction qui a engendré ce diagramme est un polynôme du degré 158 divisé par un poly-

– Même si un attracteur s'y trouve ?
 – Le point situé à l'extérieur ne le ressent pas. L'attraction est une propriété qui ne peut être ressentie qu'à proximité immédiate de l'attracteur.»

Heidi esquissa un pas de recul.

«Mais si l'intégralité de la courbe fermée constituait un attracteur ?

– Comment cela se pourrait-il ?

– La courbe de résolution graphique s'enroule en une spirale toujours plus resserrée autour de l'attracteur, jusqu'à ce qu'on ne puisse finalement plus la distinguer de lui. Un peu comme une boule qui tomberait dans une rigole circulaire : s'il n'y avait pas de frottement, elle tournerait éternellement.

– C'est comme pour l'échidné, s'exclama de nouveau la collègue de Heidi (voir *Les échidnés*, par Peggy Rismiller et Roger Seymour, *Pour la Science*, avril 1991). Les mâles tournent autour d'une femelle prête à l'accouplement et finissent par creuser un sillon circulaire. Ils continuent à tourner jusqu'à ce que l'un d'entre eux prenne le dessus dans cette cohue, et qu'il...»

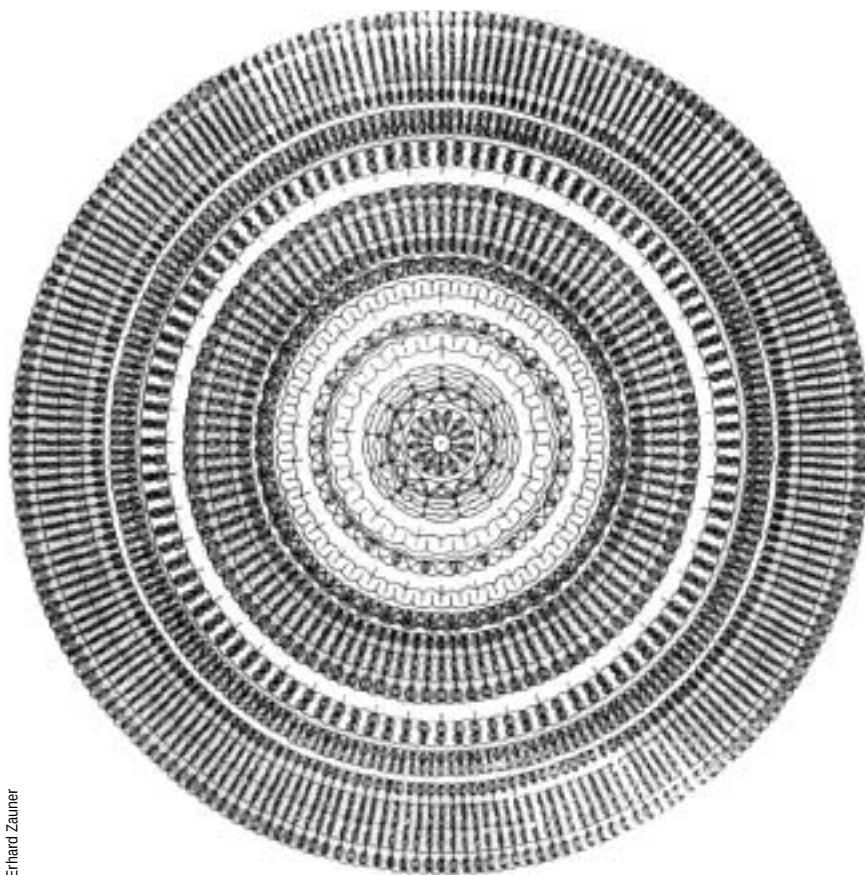
J'essayais de changer de sujet :

«La situation semble analogue, mais je crains qu'elle ne puisse pas s'expliquer en terme de champs de vecteurs. Si un domaine du plan est dépourvu de tout point critique et qu'à la périphérie de ce domaine, aucune flèche ne pointe vers l'extérieur, alors chaque solution doit tendre vers une courbe refermée sur elle-même.

– Et alors ?

– Cela pourrait devenir intéressant.

Si toutes les flèches sont dirigées vers un point, le système adopte à la longue cet état, quel que soit l'état dans lequel il se trouvait auparavant ou quelles que soient les perturbations subies. Le nombre des animaux devient à la longue constant. Si la courbe n'atteint pas un tel état d'équi-



Erhard Zauner

lui demandai si elle ne voulait pas venir les voir un jour.

Elle ne voulut même pas savoir où j'habitais. Elle en était revenue à la vie des animaux de Terre-Neuve, de sorte que je dus reprendre le train en marche :

«Imagine qu'une des courbes du champ de vecteurs du plan lynx-lièvres se referme sur elle-même.

– Comment cela ?

– Essaie d'abord de te le représenter. La démonstration viendra plus tard.

– Bon, admettons. mais ne m'impose pas quelque chose d'aussi repoussant qu'une démonstration.

– D'accord. Une courbe fermée divise le plan en une zone intérieure et une zone extérieure, et aucune des courbes qui appartiennent au champ de vecteurs ne peut passer de l'intérieur à l'extérieur ou vice versa.

– Comment cela ?

– Les familles de courbes qui appartiennent au même champ de vecteurs ne peuvent pas se croiser, car il existerait, au point de croisement, deux tangentes distinctes. Par conséquent, celui qui se trouve à l'extérieur d'une courbe fermée et qui suit le champ de vecteurs ne peut jamais passer à l'intérieur.