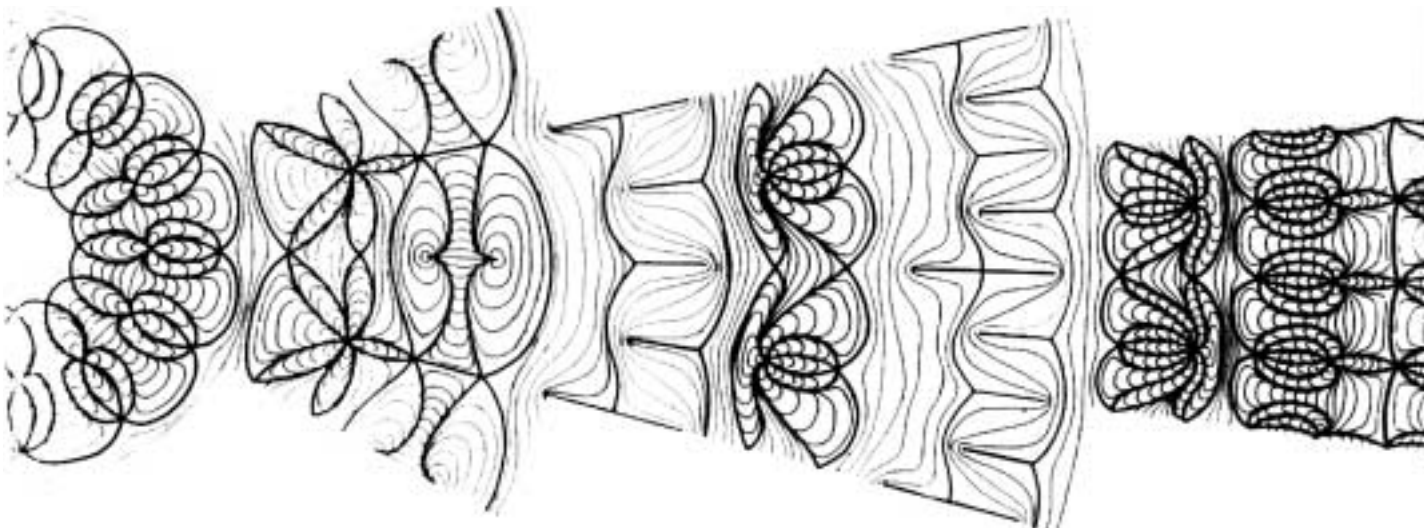




6. La fonction qui a engendré ce diagramme est un polynôme du degré 158 divisé par un poly-

– Même si un attracteur s'y trouve ?
 – Le point situé à l'extérieur ne le ressent pas. L'attraction est une propriété qui ne peut être ressentie qu'à proximité immédiate de l'attracteur.»

Heidi esquissa un pas de recul.

«Mais si l'intégralité de la courbe fermée constituait un attracteur ?

– Comment cela se pourrait-il ?
 – La courbe de résolution graphique s'enroule en une spirale toujours plus resserrée autour de l'attracteur, jusqu'à ce qu'on ne puisse finalement plus la distinguer de lui. Un peu comme une boule qui tomberait dans une rigole circulaire : s'il n'y avait pas de frottement, elle tournerait éternellement.

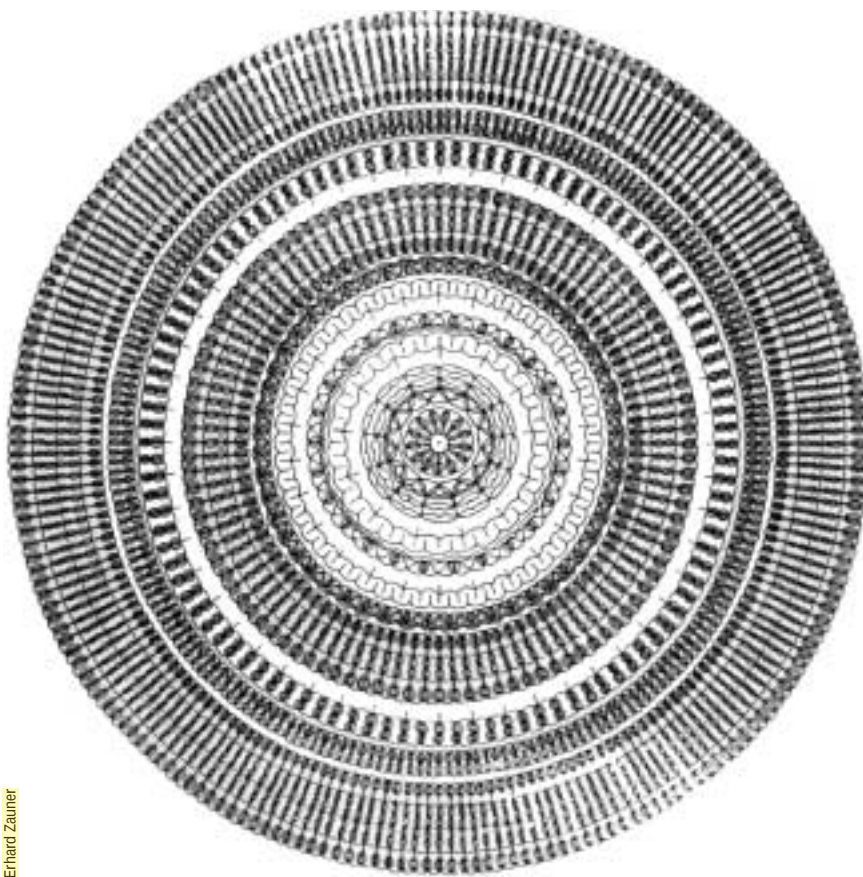
– C'est comme pour l'échidné, s'exclama de nouveau la collègue de Heidi (voir *Les échidnés*, par Peggy Rismiller et Roger Seymour, *Pour la Science*, avril 1991). Les mâles tournent autour d'une femelle prête à l'accouplement et finissent par creuser un sillon circulaire. Ils continuent à tourner jusqu'à ce que l'un d'entre eux prenne le dessus dans cette cohue, et qu'il...»

J'essayais de changer de sujet :

«La situation semble analogue, mais je crains qu'elle ne puisse pas s'expliquer en terme de champs de vecteurs. Si un domaine du plan est dépourvu de tout point critique et qu'à la périphérie de ce domaine, aucune flèche ne pointe vers l'extérieur, alors chaque solution doit tendre vers une courbe refermée sur elle-même.

– Et alors ?

– Cela pourrait devenir intéressant. Si toutes les flèches sont dirigées vers un point, le système adopte à la longue cet état, quel que soit l'état dans lequel il se trouvait auparavant ou quelles que soient les perturbations subies. Le nombre des animaux devient à la longue constant. Si la courbe n'atteint pas un tel état d'équi-



Erhard Zauner

lui demandai si elle ne voulait pas venir les voir un jour.

Elle ne voulut même pas savoir où j'habitais. Elle en était revenue à la vie des animaux de Terre-Neuve, de sorte que je dus reprendre le train en marche :

«Imagine qu'une des courbes du champ de vecteurs du plan lynx-lièvres se referme sur elle-même.

– Comment cela ?

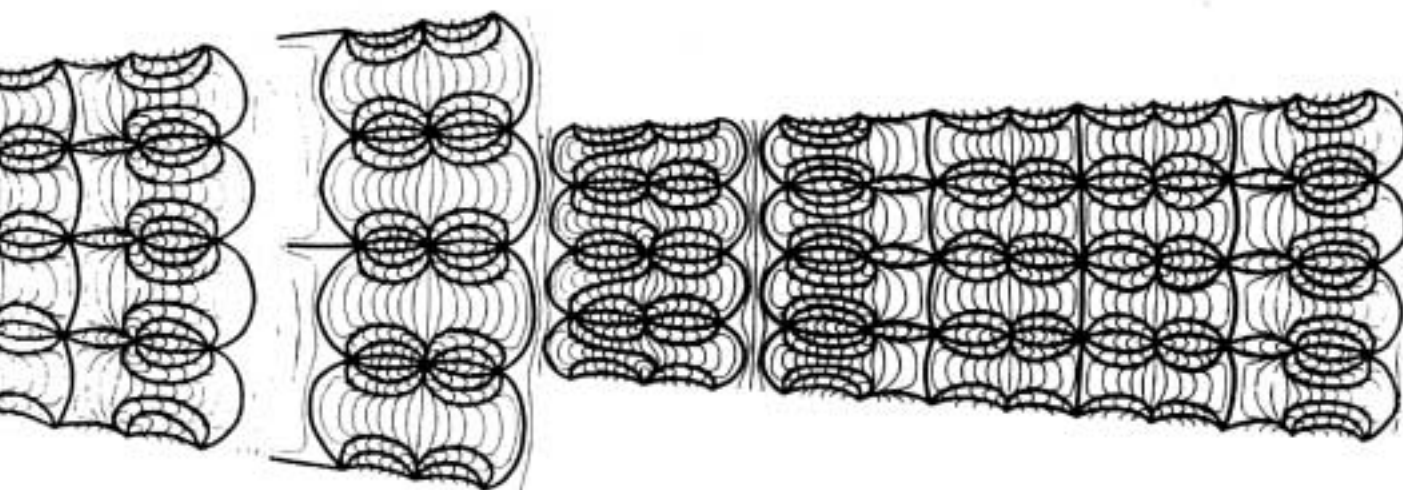
– Essaie d'abord de te le représenter. La démonstration viendra plus tard.

– Bon, admettons. mais ne m'impose pas quelque chose d'aussi repoussant qu'une démonstration.

– D'accord. Une courbe fermée divise le plan en une zone intérieure et une zone extérieure, et aucune des courbes qui appartiennent au champ de vecteurs ne peut passer de l'intérieur à l'extérieur ou vice versa.

– Comment cela ?

– Les familles de courbes qui appartiennent au même champ de vecteurs ne peuvent pas se croiser, car il existerait, au point de croisement, deux tangentes distinctes. Par conséquent, celui qui se trouve à l'extérieur d'une courbe fermée et qui suit le champ de vecteurs ne peut jamais passer à l'intérieur.



l'agrandissement d'un secteur qui permet de vérifier que les courbes intégrales couvrent effectivement la totalité du plan sans aucune lacune.

l'agrandissement d'un secteur qui permet de vérifier que les courbes intégrales couvrent effectivement la totalité du plan sans aucune lacune.

libre, ni ne disparaît vers l'infini, elle devra forcément se dérouler quelque part dans le plan lynx-lièvres.

– Cela va donner un drôle de graffiti.
– Justement pas, car la courbe ne peut pas se recouper. Elle ne peut pas non plus se coller contre elle-même, bien que les tangentes deviendraient égales en pareil cas. Il apparaît donc que cette courbe doit être refermée sur elle-même, et la solution serait alors de nature périodique, car cet état se reproduirait à chaque tour de courbe.

– C'est ce qui expliquerait le mouvement de balancier que l'on observe tous les dix ans entre les lynx et les lièvres ?

– Pour ainsi dire.

– Je n'en reviens pas ! Tu me racontes les histoires les plus absurdes sur des fractions de lièvre par seconde infiniment petites, tu affirmes que le hasard ne joue aucun rôle, tu me gâches le soleil parisien avec tes flèches directionnelles que l'on ne peut pas voir et avec tes points qui ne sont plus attractifs qu'abordés de côté, et tout ce non-sens finit par donner quelque chose qui colle avec la réalité ?

– Cela n'a rien d'étonnant. S'il est vrai que la nature ne cadre que très approximativement avec les théories mathématiques...

– Je dirais plutôt l'inverse...

– ... Il n'en reste pas moins que, dans le cas présent, la solution périodique reste stable, car le système est capable de reprendre son comportement périodique après une perturbation qui n'a pas été trop forte. Si, par exemple, un lièvre échappe de manière imprévisible aux griffes d'un lynx, cela n'aura à la longue aucune conséquence dramatique.

– Et que se passe-t-il si l'on libère d'un coup de nombreux lièvres au moment même où leur population est en train d'augmenter ?

– Alors, le prochain maximum de lièvres sera plus marqué, et le prochain cycle présentera des oscillations plus importantes, mais à la longue, le système s'équilibrera.

– Et si l'on fait la même chose au moment où les lynx sont en force ?

– Alors ils attaqueront les lièvres de plus belle. Et les retardataires seront condamnés à mourir d'inanition. Mais en principe, les règles qui s'appliquent au premier cas restent valables.

– Est-ce que cela veut dire qu'on peut calculer si un écosystème est stable ?

– En principe oui, à condition que le modèle mathématique se rapproche suffisamment de la réalité.

– Mais est-ce que vous, les mathématiciens, vous ne pourriez pas tout simplement partir de la réalité ?

– Nous n'aimons pas cela, c'est trop compliqué. Il nous est beaucoup plus simple de bricoler une théorie et de l'adapter ensuite à la réalité.

– Et si plus de deux espèces animales interviennent ?

– Dans ce cas, les choses se compliquent. La série de solutions périodiques stables n'est valable que dans un espace à deux dimensions. Nous nous retrouvons dans le cas du problème à N corps en mécanique céleste. Un soleil et une planète se déplacent sur des trajectoires bien établies l'un par rapport à l'autre, mais dès qu'un troisième corps céleste entre dans la danse, le chaos menace !»

La collègue de Heidi vint nous rejoindre et commença à nous expliquer de manière détaillée comment deux mâles échidnés se disputaient les femelles. Je dus me faire à l'idée que Heidi ne se serait de toute façon pas intéressée à l'apparence remarquable d'un attracteur en trois dimensions – qui ne serait en fait ni bidimensionnel, ni tridimensionnel, mais se situerait

quelque part entre les deux, tout comme l'attracteur en forme de papillon de Lorenz, entre-temps devenu célèbre. Toujours est-il que de telles quantités sont définies dans le jargon spécialisé comme *étrange*.

Pendant que je subissais ma leçon de choses sur l'échidné, Heidi avait brusquement disparu. Avait-elle pris la fuite de peur d'entendre d'autres mathématiques ? Je dévalai les escaliers quatre à quatre et m'enfonçai sous terre jusqu'à la station de métro – pour la voir monter dans une rame et assister à la fermeture des portes du wagon...

Le métro parisien constitue un cas typique de solution périodique du problème de transport à courte distance. Afin de conserver sa stabilité à la solution et d'éviter que les voyageurs pressés ne retardent le départ en se précipitant au dernier moment, l'accès à certains quais est pourvu de portillons automatiques. C'est ainsi qu'on évite des perturbations qui risqueraient d'influencer trop profondément le système.

Je restais là, planté sur le quai, en me disant que je n'étais qu'une perturbation d'un système périodique qui était arrivée au mauvais moment.

Christoph PÖPPE est journaliste à la revue *Spektrum der Wissenschaft*.

Earl A. CODDINGTON ET **Norman LEVINSON**, *Theory of Ordinary Differential Equation*, McGraw-Hill, 1955.

Martin BRAUN, *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen*, éditions Springer, 1991.

Edward BELTRAMI, *Von Krebsen und Kriminellen*, Vieweg, Brunswick / Wiesbaden, 1993.

Wilhelm SCHARNOWELL, *Schaubilder komplexer Funktionen*, à compte d'auteur, Dortmund 1983.