

Un autre auteur indien, Krishna, aborde le concept d'infiniment petit, qui sera très utilisé dans le calcul différentiel et intégral à la fin du XVII^e et au XVIII^e siècles. Euler, le grand mathématicien du XVIII^e siècle, développait ce calcul infinitésimal avec des infiniment petits, qu'il négligeait dans certains calculs. Comme les mathématiques sont une science parfaitement exacte, on ne peut pas négliger quelque chose qui ne soit pas rigoureusement nul, donc ces infiniment petits... sont nuls.

Mais alors, comment peut-on calculer avec des zéros ? Dans le calcul infinitésimal, il y a des choses qu'on appelle dx , dx^2 . Si toutes valent zéro, que signifie cette notation ? Euler explique qu'il y a deux façons de comparer des grandeurs. La façon qu'il appelle arithmétique, qui consiste à dire : « Deux quantités sont égales si leur différence est nulle ». Sous ce rapport-là, tous les infiniment petits sont égaux entre eux. Selon une autre façon de voir, deux quantités sont égales quand leur quotient est égal à 1, et, à ce moment-là, le quotient de deux zéros, $0/0$, peut avoir un sens. comme l'indiquait le mathématicien indien Bhāskara.

Cette définition est imposée par l'astronomie chez Bhāskara, et par le développement du calcul différentiel chez Euler. La pratique d'Euler du calcul sur des infiniment petits, nuls quand cela l'arrange, ne nous satisfait plus maintenant. Au XX^e siècle, on a développé une théorie, l'analyse non standard, où les infiniment petits ont un statut propre sans être des zéros : ce sont des quantités qui, multipliées par n'importe quel entier, restent toujours infiniment petites. On a ainsi donné un sens légitime et rigoureux à tous ces infiniment petits qui avaient un statut incertain au XVIII^e siècle et même encore au XIX^e siècle.

Zéro est-il le premier nombre ? Quand on commence à numérotter, on commence par 1, pas par 0. On s'interroge : le XX^e siècle se termine-t-il en 2000 ou en 2001 ? On verra bientôt refluer le débat parce que notre ère commence par l'année 1 et pas par l'année zéro. Les Mayas, des spécialistes du calendrier, étaient plus cohérents : ils commençaient le mois par le jour zéro. Chez les Mayas, la querelle sur le début du troisième millénaire n'aurait pas lieu d'être !

Au siècle dernier, Peano a fondé l'axiomatique, mais il n'admettait pas encore zéro comme nombre et il commence à 1, ce qui est maladroit.

0⁰ ?

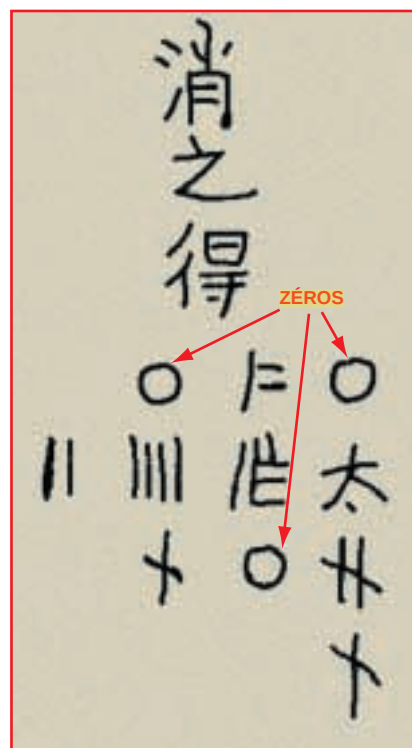
Le problème de la valeur de 0^0 apparaît dans Euler. Quelle est la valeur de a^b quand on fait tendre a et b vers zéro. Il

y a ou non une limite selon la façon dont a et b tendent vers zéro. Si on fait x^x , et qu'on fait tendre x vers zéro, on obtient 1. C'est la seule définition raisonnable, cohérente, de 0^0 . Nous pouvons mieux la justifier avec la théorie des ensembles.

En théorie des ensembles, les nombres dérivent des conceptions sur les ensembles. On définit les nombres ordinaux à partir de l'idée d'ensembles bien ordonnés. Un ensemble bien ordonné, c'est un ensemble où l'on a une relation d'ordre qui permet de dire si un élément est avant un autre : chaque fois qu'on prend une partie non vide d'un ensemble bien ordonné, cette partie a un premier élément.

Dans la hiérarchie des ensembles, il y a d'abord l'ensemble vide qui n'a aucun élément : quel que soit l'élément x , x n'appartient pas à l'ensemble vide. Ce qui est difficile à concevoir, c'est que, là où il n'y a rien, il y a quand même un ensemble. Il faut s'ôter de la tête qu'un ensemble est une collection d'objets, parce qu'une collection qui n'a aucun objet n'est pas une collection.

L'ensemble vide est déjà un ordinal, l'ordinal zéro. On peut construire un deuxième ensemble qui a pour seul élément l'ensemble vide. C'est l'ordinal 1.



5. Le plus ancien texte mathématique chinois comportant le symbole du zéro sous forme d'un cercle est le *Shushu jiu Zhang* de 1247. Le texte ci-dessus, le *Siyuan yujian*, date de 1303. L'énorme intervalle entre le zéro-cercle indien et le zéro-cercle chinois militerait en faveur d'une influence indienne.

Ensuite on prend l'ensemble qui a comme seul élément l'ensemble vide, et l'ensemble vide, et l'on définit l'ordinal 2.

Cette construction des nombres entiers à partir de l'ensemble vide est l'œuvre du mathématicien américain d'origine hongroise, von Neumann. Les cardinaux sont des ordinaux particuliers : chaque ordinal fini est un cardinal. À chaque ensemble correspond un cardinal qui compte combien il y a d'éléments. Sur les ensembles, on peut faire des constructions qui singent les opérations arithmétiques sur les nombres. On définit ces opérations sur les ensembles d'abord, et les opérations sur les nombres en découlent.

Ainsi, la somme disjointe des deux ensembles est un nouvel ensemble dont les éléments appartiennent à l'un ou à l'autre. Cette somme correspond simplement à l'addition des nombres : si l'ensemble A a pour cardinal a , si B a pour cardinal b , le cardinal de la somme disjointe est $a + b$. Cette transposition a toutes les propriétés de l'addition et peut être étendue aux cardinaux infinis. Similairement, le produit $A \times B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble des couples qui ont deux composantes a ; b , une composante a dans A , une composante b dans B . Le cardinal de $A \times B$ est le cardinal de A multiplié par le cardinal de B .

Une troisième opération est l'exponentiation : A^B , A et B étant des ensembles : c'est l'ensemble de toutes les applications de B dans A qui, à chaque élément de B , associe un élément de A . L'ensemble de ces applications est A^B . Le cardinal de A^B c'est le cardinal de A à la puissance du cardinal de B . Nous pouvons alors donner un sens à 0^0 , qui est le cardinal de l'ensemble vide à la puissance de l'ensemble vide : ce sont toutes les applications de l'ensemble vide dans lui-même. Comme il n'y en a qu'une, 0^0 est égal à 1.

D'AUTRES ZÉROS

L'invention du zéro est une très grande découverte mathématique : tout un pan des mathématiques est né de ce bouillonnement qui vient du zéro.

Sans le zéro, il n'y a pas de dérivées, pas de calcul infinitésimal, pas d'intégrales. L'utilisation du zéro en tant qu'infiniment petit non nul est très délicate, et s'affine encore aujourd'hui. En géométrie algébrique, on a besoin d'infiniment petits parce que les courbes algébriques ont des tangentes. Il faut savoir les construire, calculer dessus, mais, en algèbre, on ne peut pas tou-