

De Fermat à abc

On généralise le théorème de Fermat.

En démontrant le théorème de Fermat, en 1994, Andrew Wiles et ses collègues parachevaient l'édifice construit depuis trois siècles. Cette démonstration n'a cependant pas mis un terme aux recherches dans ce domaine. Henri Darmon, de l'Université McGill, et Loïc Merel, de l'Institut de mathématiques de Paris 6, ont prolongé le théorème de Fermat.

L'étude des équations diophantiennes, équations polynomiales dont les constantes et les solutions sont des entiers, est centrale en théorie des nombres. Depuis le XVII^e siècle, les mathématiciens ont accumulé les résultats sur des équations diophantiennes particulières : ainsi l'on sait qu'il n'y a pas d'entiers qui vérifient $x^4 + y^4 = z^2$ (Fermat, XVII^e siècle), $x^3 + y^3 = z^3$ et $x^4 + y^4 = 2z^2$ (Euler, XVIII^e siècle).

TRIPLETS (abc)

$$\begin{aligned} 1 + 2^3 &= 3^2 \\ 2^5 + 7^2 &= 3^4 \\ 13^2 + 7^3 &= 2^9 \\ 17^3 + 2^7 &= 71^2 \\ 3^5 + 11^4 &= 122^2 \\ 17^7 + 76\,271^3 &= 21\,063\,928^2 \\ 1\,414^3 + 2\,213\,459^2 &= 65^7 \\ 9\,262^3 + 15\,312\,283^2 &= 113^7 \\ 43^8 + 96\,222^3 &= 30\,042\,907^2 \\ 33^8 + 1\,549\,034^2 &= 15\,613^3 \end{aligned}$$

La conjecture abc prédit qu'il n'y a qu'un nombre fini de triplets (abc) de la forme $x^r + y^s = z^t$ avec $1/r + 1/s + 1/t < 1$. Seuls les dix triplets ci-dessus ont été découverts.

Un triplet (abc) désigne trois entiers non nuls a, b, c sans facteur commun et vérifiant $a + b = c$ (ainsi, dans l'égalité $1 + 2^3 = 3^2$, $a = 1$, $b = 8$ et $c = 9$). On sait aujourd'hui, outre l'absence de solution de l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$ pour n supérieur à 2, que, pour n grand, il n'y a qu'un nombre fini de triplets (abc) de la forme $x^n + y^n = \lambda z^n$, où λ est une puissance d'un nombre premier qui n'est ni 2, ni de la forme $2^k + 1$ ou $2^k - 1$. Le

cas où λ est égal à 2 est aujourd'hui résolu : Loïc Merel et Henri Darmon ont démontré que le seul triplet d'entiers premiers entre eux vérifiant $x^n + y^n = 2z^n$, avec n supérieur à 2, est (1,1,1).

La conjecture de Fermat-Catalan généralisée a été proposée : pour u, v et w entiers fixés, il n'y a qu'un nombre fini de triplets (abc) de la forme $ux^r + vy^s = wz^t$ avec $1/r + 1/s + 1/t < 1$.

On démontrerait facilement ce résultat si une conjecture encore plus forte, formulée en 1984 par David Masser et Joseph Oesterle, la conjecture abc, était vraie. Son énoncé affirme que pour tout triplet (abc), c ne peut être « trop grand » comparé au produit des nombres premiers divisant abc (noté $p(abc)$). À titre d'illustration, on n'a trouvé aucun triplet (abc) avec $c > p(abc)^2$.

Malgré sa jeunesse, la conjecture abc suscite un intérêt considérable. Si on savait la démontrer, elle entraînerait bien d'autres conjectures et théorèmes difficiles. On en déduit notamment, le théorème général sur la conjecture de Mordell, dont la démonstration a valu au mathématicien allemand Gerd Faltings la médaille Fields en 1984.

Le blé, polluant marin

Entre Corse et Sardaigne s'étend la réserve naturelle des Lavezzi, où flore et faune sont préservées sur 5 000 hectares. L'écosystème y est protégé, la pêche au harpon et à la ligne y sont interdites. Le 25 septembre 1996, un cargo chargé de blé, en provenance de Port-La-Nouvelle, près de Narbonne et en route pour l'Albanie, s'est échoué. Les 2 500 tonnes de blé qu'il transportait se sont répandues sur



Le blé répandu au fond de la mer (à gauche) asphyxie les herbiers de posidonie (à droite).

le fond. Juste après le naufrage, la surface recouverte était de l'ordre de un hectare. Pourtant, comme la masse de blé se déplace au gré des courants et des tempêtes, certaines zones recouvertes après le naufrage sont aujourd'hui découvertes, tandis que de nouvelles zones sont enfouies.

Or, tout ce qui est enfoui sous le blé périt : que ce soit la faune fixée ou la flore. De surcroît, le blé se décompose, libère de l'amidon sous forme d'une pellicule blanche qui recouvre l'eau, ou de filaments qui s'agglutinent sur les algues. Toutes les algues et les massifs de posidonie (des plantes à

fleurs sous-marines), privées de leur apport en oxygène, meurent.

Selon Alexandre Meinesz, du Laboratoire Environnement marin littoral, à Nice, les pétroliers qui se sont échoués de par le monde, libérant de leur soute des centaines de milliers de tonnes de pétrole ont eu un impact désastreux sur la faune et sur la flore des régions exposées, mais quelques années plus tard, faune et flore s'étaient reconstituées naturellement.

Au contraire, étant donné la faible vitesse de croissance de certaines des espèces détruites par le blé, il faudra plusieurs siècles pour que les herbiers de posidonie recolonisent les surfaces « brûlées » par le blé en décomposition. En effet, les posidonies progressent par leur rhizome, une tige rampante d'où partent racines et feuilles. Or ce rhizome ne pousse que de quelques centimètres par an. Le blé – polluant inattendu – a commencé à être pompé au début du mois de décembre, afin que l'impact écologique de cet échouage soit limité.