

De Fermat à abc

On généralise le théorème de Fermat.

En démontrant le théorème de Fermat, en 1994, Andrew Wiles et ses collègues parachevaient l'édifice construit depuis trois siècles. Cette démonstration n'a cependant pas mis un terme aux recherches dans ce domaine. Henri Darmon, de l'Université McGill, et Loïc Merel, de l'Institut de mathématiques de Paris 6, ont prolongé le théorème de Fermat.

L'étude des équations diophantiennes, équations polynomiales dont les constantes et les solutions sont des entiers, est centrale en théorie des nombres. Depuis le XVII^e siècle, les mathématiciens ont accumulé les résultats sur des équations diophantiennes particulières : ainsi l'on sait qu'il n'y a pas d'entiers qui vérifient $x^4 + y^4 = z^2$ (Fermat, XVII^e siècle), $x^3 + y^3 = z^3$ et $x^4 + y^4 = 2z^2$ (Euler, XVIII^e siècle).

TRIPLETS (abc)

$$\begin{aligned} 1 + 2^3 &= 3^2 \\ 2^5 + 7^2 &= 3^4 \\ 13^2 + 7^3 &= 2^9 \\ 17^3 + 2^7 &= 71^2 \\ 3^5 + 11^4 &= 122^2 \\ 17^7 + 76\,271^3 &= 21\,063\,928^2 \\ 1\,414^3 + 2\,213\,459^2 &= 65^7 \\ 9\,262^3 + 15\,312\,283^2 &= 113^7 \\ 43^8 + 96\,222^3 &= 30\,042\,907^2 \\ 33^8 + 1\,549\,034^2 &= 15\,613^3 \end{aligned}$$

La conjecture abc prédit qu'il n'y a qu'un nombre fini de triplets (abc) de la forme $x^r + y^s = z^t$ avec $1/r + 1/s + 1/t < 1$. Seuls les dix triplets ci-dessus ont été découverts.

Un triplet (abc) désigne trois entiers non nuls a, b, c sans facteur commun et vérifiant $a + b = c$ (ainsi, dans l'égalité $1 + 2^3 = 3^2$, $a = 1$, $b = 8$ et $c = 9$). On sait aujourd'hui, outre l'absence de solution de l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$ pour n supérieur à 2, que, pour n grand, il n'y a qu'un nombre fini de triplets (abc) de la forme $x^n + y^n = \lambda z^n$, où λ est une puissance d'un nombre premier qui n'est ni 2, ni de la forme $2^k + 1$ ou $2^k - 1$. Le

cas où λ est égal à 2 est aujourd'hui résolu : Loïc Merel et Henri Darmon ont démontré que le seul triplet d'entiers premiers entre eux vérifiant $x^n + y^n = 2z^n$, avec n supérieur à 2, est (1,1,1).

La conjecture de Fermat-Catalan généralisée a été proposée : pour u, v et w entiers fixés, il n'y a qu'un nombre fini de triplets (abc) de la forme $ux^r + vy^s = wz^t$ avec $1/r + 1/s + 1/t < 1$.

On démontrerait facilement ce résultat si une conjecture encore plus forte, formulée en 1984 par David Masser et Joseph Oesterle, la conjecture abc, était vraie. Son énoncé affirme que pour tout triplet (abc), c ne peut être « trop grand » comparé au produit des nombres premiers divisant abc (noté $p(abc)$). À titre d'illustration, on n'a trouvé aucun triplet (abc) avec $c > p(abc)^2$.

Malgré sa jeunesse, la conjecture abc suscite un intérêt considérable. Si on savait la démontrer, elle entraînerait bien d'autres conjectures et théorèmes difficiles. On en déduit notamment, le théorème général sur la conjecture de Mordell, dont la démonstration a valu au mathématicien allemand Gerd Faltings la médaille Fields en 1984.

Le blé, polluant marin

Entre Corse et Sardaigne s'étend la réserve naturelle des Lavezzi, où flore et faune sont préservées sur 5 000 hectares. L'écosystème y est protégé, la pêche au harpon et à la ligne y sont interdites. Le 25 septembre 1996, un cargo chargé de blé, en provenance de Port-La-Nouvelle, près de Narbonne et en route pour l'Albanie, s'est échoué. Les 2 500 tonnes de blé qu'il transportait se sont répandues sur



Le blé répandu au fond de la mer (à gauche) asphyxie les herbiers de posidonie (à droite).



fleurs sous-marines), privées de leur apport en oxygène, meurent.

Selon Alexandre Meinesz, du Laboratoire Environnement marin littoral, à Nice, les pétroliers qui se sont échoués de par le monde, libérant de leur soute des centaines de milliers de tonnes de pétrole ont eu un impact désastreux sur la faune et sur la flore des régions exposées, mais quelques années plus tard, faune et flore s'étaient reconstituées naturellement.

Juste après le naufrage, la surface recouverte était de l'ordre d'un hectare. Pourtant, comme la masse de blé se déplace au gré des courants et des tempêtes, certaines zones recouvertes après le naufrage sont aujourd'hui découvertes, tandis que de nouvelles zones sont enfouies.

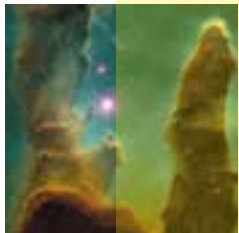
Or, tout ce qui est enfoui sous le blé périt : que ce soit la faune fixée ou la flore. De surcroît, le blé se décompose, libère de l'amidon sous forme d'une pellicule blanche qui recouvre l'eau, ou de filaments qui s'agglutinent sur les algues. Toutes les algues et les massifs de posidonie (des plantes à

tuées naturellement. Au contraire, étant donné la faible vitesse de croissance de certaines des espèces détruites par le blé, il faudra plusieurs siècles pour que les herbiers de posidonie recolonisent les surfaces « brûlées » par le blé en décomposition. En effet, les posidonies progressent par leur rhizome, une tige rampante d'où partent racines et feuilles. Or ce rhizome ne pousse que de quelques centimètres par an. Le blé – polluant inattendu – a commencé à être pompé au début du mois de décembre, afin que l'impact écologique de cet échouage soit limité.

Le chaînon manquant

À l'exception de l'hydrogène moléculaire, H_2 , la quasi-totalité des centaines de molécules du milieu interstellaire sont produites par des réactions chimiques mettant en jeu l'ion H_3^+ , le plus simple des ions polyatomiques stables. Après 15 années de recherche, les astronomes américains T. Geballe et T. Oka ont enfin détecté cet ion dans des nuages du milieu interstellaire.

Grâce à la mesure de l'abondance de H_3^+ , on pourra calculer directement le taux d'ionisation du milieu interstellaire, paramètre fondamental de la chimie interstellaire et de la formation des étoiles.



Pression et cuisson

On stérilise généralement en chauffant, mais on peut aussi stériliser en comprimant. Pourquoi? Parce que des pressions de plusieurs milliers d'atmosphères rompent des liaisons chimiques faibles, sans dégrader les molécules : les vitamines sont préservées, les glucides ne sont pas chimiquement modifiés, les lipides sont liquéfiés, les protéines sont dénaturées, ce qui conduit à des modifications de texture caractéristiques d'une cuisson. Ce traitement détruit les micro-organismes. Il a été nommé pascalisation, en l'honneur de Blaise Pascal, dont le nom a été donné à l'unité internationale de pression, et sort aujourd'hui des laboratoires : un centre de transfert technique, équipé de pilotes industriels, s'ouvre aujourd'hui à Bar-le-Duc.

Une dent parmi les diamants

Les grands singes d'Afrique occupaient un territoire notablement plus vaste que ne l'admettaient les paléontologues, comme en témoigne la molaire découverte parmi des diamants extraits d'une mine, en Afrique du Sud. Jusqu'à présent on pensait que ces primates hominoïdes avaient vécu dans les régions équatoriales. Selon Brigitte Senut, du Muséum national d'histoire naturelle, et Martin Pickford, du Collège de France, l'animal avait une taille intermédiaire entre celle d'un chimpanzé et celle d'un gorille actuels ; il aurait vécu il y a environ 18 millions d'années. C'est peut-être un ancêtre du kenyanopitèque, considéré comme l'ancêtre des grands singes et de l'homme.

La desmine

Les souris dépourvues de cette protéine ont un cœur et des muscles défaillants.

L'armature des cellules maintient leur forme et assure leurs déplacements. Ce cytosquelette est constitué de diverses protéines. L'équipe de Denise Paulin, à l'Institut Pasteur, a montré que l'une de ces protéines, la desmine, assure la cohésion et la résistance du tissu musculaire. Aujourd'hui, on découvre que diverses maladies qui touchent le tissu musculaire, et dont on ignorait la cause, résulteraient de mutations du gène codant la desmine.

Tous les constituants du cytosquelette participent à la morphogenèse et au mouvement des cellules. Chacun a une tâche bien précise : les tubulines, à l'intérieur des cellules, assurent les mouvements des constituants intracellulaires ; la mobilité de la membrane cellulaire dépend des microfilaments d'actine qui donnent sa forme au corps cellulaire ; les filaments intermédiaires, qui forment l'armature proprement dite, confèrent leurs propriétés élastiques aux tissus. Grâce à ces divers éléments, les cellules résistent aux contraintes qu'elles ont à subir.

Il existe plusieurs classes de filaments intermédiaires. Dans le tissu musculaire, ces filaments sont constitués de desmine. Les molécules de desmine, assemblées en réseau tridimensionnel, assurent la jonction entre les sous-unités contractiles, ou sarcomères, des fibres musculaires. Ces sarcomères assurent la contraction musculaire, et les assemblages de desmine agissent comme des amortisseurs. En ce qui concerne les muscles lisses, tels les vaisseaux sanguins et les parois des viscères, les fila-

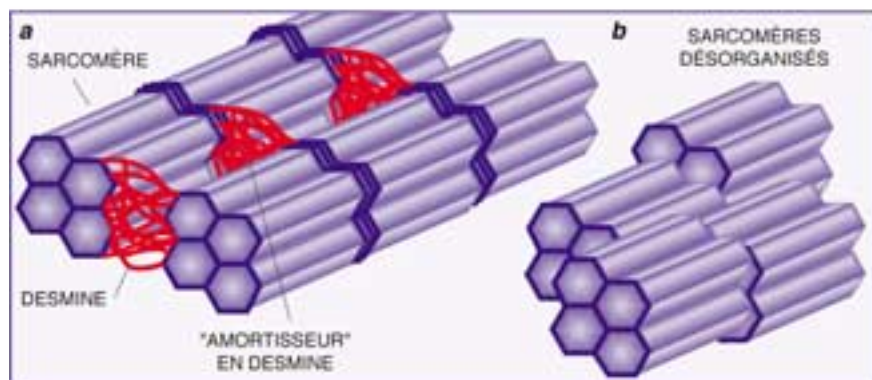
ments de desmine, situés à l'intérieur des cellules, leur permettent de résister aux différences de pression qui règnent de part et d'autre des parois.

Les molécules de desmine de l'homme et de la souris sont très semblables, de sorte que les anomalies observées chez des souris qui en sont dépourvues renseignent les généticiens sur le rôle exact de cette protéine. L'équipe de D. Paulin a obtenu des souris sans desmine en substituant au gène codant la desmine, un gène muté qui interdit la fabrication de l'ARN messager et, par conséquent, de la protéine.

En l'absence de desmine, les cellules ne sont plus jointives, le tissu musculaire présente des déchirures microscopiques, et les souris ont de graves malformations cardiaques. La cohésion cellulaire n'est plus assurée, et le cœur est criblé de petits trous. Le tissu cardiaque est anormalement blanchâtre, sans doute en raison d'une fuite d'ions calcium. Les souriceaux survivent parfois pendant une année, mais sont très faibles. Ils sont beaucoup moins endurants que les souriceaux normaux.

Chez l'homme, certaines maladies résulteraient d'anomalies des filaments intermédiaires. La phosphorylation des protéines (le nombre de groupes phosphate qu'elles portent) serait anormale, ce qui interdirait la formation des réseaux protéiques assurant la cohésion des tissus. Ainsi, l'épidermolyse bulleuse, une maladie où la peau se décolle, résulterait d'anomalies des filaments intermédiaires de la peau ; certaines myopathies familiales atteignant les muscles des membres ou le muscle cardiaque seraient dues à des anomalies de la desmine. Les molécules, trop phosphorylées, ne se lieraient plus les unes aux autres, ni aux tissus qu'elles soutiennent. L'origine inconnue de diverses myopathies semble se préciser.

Marie-Thérèse LANDOUSY



Les sarcomères, les sous-unités des fibres musculaires, sont reliés par des «amortisseurs» en desmine. En l'absence de cette protéine (à droite), les sarcomères sont désorganisés, aucune protéine ne les reliant ; les animaux ont alors une résistance à l'effort très inférieure à celle des animaux sains.