



François Perego

7. Certains gels «thixotropes» peuvent passer de l'état gel à l'état fluide quand ils sont soumis à des contraintes (la photographie montre un gel thixotrope avant et après agitation).

couteau pour tartiner. La brosse, pinceau dur en soie de porc, pose, appuie, racle, pousse, tire la pâte sur le support. Son poil, s'il était trop mou, n'aurait pas une résistance suffisante. Il n'est d'ailleurs parfois plus indispensable d'utiliser un pinceau : pensons à la peinture au couteau, ou avec les doigts.

Avec les brosses en poils raides, tels les soies de porc, les poils dans le côté sous pression de la courbure concave s'écartent de la touffe à la base, augmentant ainsi la réserve de peinture à cet endroit. Mais aussi, lors de la relaxation de la contrainte, une partie de la pâte remonte à la surface de la touffe, pour former un bourrelet. Le peintre doit régulièrement récupérer cette peinture. Une pâte thixotrope accentue le phénomène : cette partie de la touffe se déforme peu, donc les mouvements de fluide y sont lents. La pâte gélifie et ne redescend plus dans la touffe.

Le peintre choisit ainsi ses pinceaux en fonction de la consistance de la pâte qu'il travaille : un poil fort pour une pâte, avec une sortie courte pour des pâtes plus épaisses ; un poil fin et souple pour les peintures plus fluides et un bon réservoir si nécessaire, car, dans ce cas, on peut jouer avec les phénomènes de capillarité. Il existe une différence importante entre les brosses de porc rudes et courtes utilisées par Van Gogh ou Monet, et les pinceaux en petit gris ou en martre employés par les aquarellistes. Inversement il est impossible de peindre comme Van Gogh avec des pinceaux en petit gris, ou de travailler comme Van Eyck avec des brosses en porc.

Pour que le trait ou l'aplat soit régulier, l'écoulement doit être continu, ce qui dépend de la capacité du pinceau à délivrer le fluide, de la vitesse d'éta-

ment, de la nature du fluide et de l'absorbance du support. D'autant qu'un pinceau ne sert pas seulement à étaler une matière, mais aussi à la travailler, à la lisser, la structurer, fonder deux teintes, etc. Certains pinceaux, même, ne permettent pas de prendre de la peinture : on les réserve pour retravailler une peinture déjà appliquée.

Cet univers du pinceau est plein de mystères. Il est parfois difficile de nettoyer un pinceau à fond : il reste souvent de la peinture à la base de la touffe entre les poils, ce qui forme un talon, gêne le nettoyage et finit par abîmer le pinceau. Une conception nouvelle de pinceau résoudra-t-elle ce problème ? D'autre part, les poils synthétiques s'usent en se courbant et en se bouclant vers l'extérieur, contrairement aux poils naturels ; les fabricants utilisent de plus en plus les mélanges de poils synthétiques et naturels, mais quelles sont les proportions idéales et pour quels rapports de diamètres de poils ?

Les poils naturels ne poussent pas toujours droit, de sorte qu'ils sont souvent redressés, durant leur préparation, mais il arrive souvent que des poils sortent du gabarit idéal de la touffe. Existe-t-il un système de «mise en plis» qui moulerait la touffe dans une forme quasi parfaite, sans dénaturer les capacités du poils ? La section des poils synthétiques, comme celle des poils naturels, est cylindrique : une autre section accroîtrait-elle la réserve, le nerf, la conduite capillaire ou la douceur du toucher sans compliquer le nettoyage ? Outil millénaire, le pinceau n'a pas fini d'évoluer.

François Perego est peintre restaurateur à Bécherel (Ille-et-Vilaine).

Le Monopoly revisité

IAN STEWART

Le jeu est équitable, mais, à long terme, toutes les cases ne sont pas équiprobables.

En juin 1996, nous avons examiné un modèle mathématique du jeu de *Monopoly*. Au début du jeu, lorsque tous les joueurs sortent de la case *Départ*, en lançant une paire de dés, ils ont des probabilités variées d'atteindre les douze premières cases. En utilisant des objets mathématiques nommés «chaînes de Markov», nous avons vu que la répartition initiale des probabilités d'occupation des cases se nivelait progressivement, et nous avons conclu que le jeu est équitable : tous les joueurs ont la même probabilité d'occuper une case quelconque et d'acheter la rue qui lui correspond. Toutefois ce résultat n'est vrai qu'au prix de simplifications, et les adeptes du *Monopoly* m'ont fait remarquer que, dans le vrai jeu, la répartition à long terme n'est pas équiprobable.

Quelle est la véritable répartition ? La méthode des chaînes de Markov s'applique également au véritable jeu, mais l'analyse est complexe et impose un recours à l'aide informatique. Avant tout, revoyons comment les chaînes de Markov s'appliquent au *Monopoly*. Un joueur peut être sur n'importe laquelle des 40 cases du plateau que, par commodité, nous numérotions dans le sens des aiguilles d'une montre, de 0 pour la case *Départ*, à 39 pour la *Rue de la Paix*.

Entre deux cases *A* et *B*, la probabilité de transition est le nombre qui exprime la probabilité qu'un joueur partant de *A* atteigne *B* à son prochain lancer des dés. Si le déplacement est impossible, la probabilité de transition est nulle.

Il existe 40×40 , soit 1 600 probabilités de transition, que l'on représente dans une matrice carrée *M* (un tableau de nombres) à 40 lignes et à 40 colonnes. Par exemple, le coefficient de la sixième ligne et de la dixième colonne est la probabilité de passer de la *Gare Montparnasse* à l'*Avenue de la République* en un coup. Les probabilités d'occupation initiales, pour tout joueur, sont égales à 1 pour la position 0, et à 0 pour les autres cases ; on peut les représenter par un vecteur $v = (1, 0, 0, \dots, 0)$.

La théorie des chaînes de Markov indique que l'évolution de cette répartition de probabilités est donnée par la suite de vecteurs $v, Mv, M^2v, M^3v, \dots$, où chaque lancer de dés correspond au produit de *M* par le vecteur précédent de la suite. Les programmes d'ordinateur calculent de telles suites, ainsi que les valeurs propres et vecteurs propres des matrices. Un vecteur *u* est un vecteur propre de *M*, associé à la valeur propre *c*, si Mu est égal à cu : le produit d'une matrice par un vecteur propre donne un vecteur proportionnel au vecteur propre. Le théorème

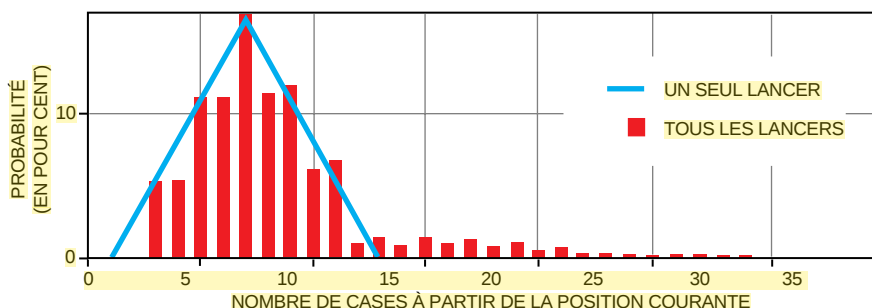
central de Markov stipule que la répartition à long terme est donnée par le vecteur propre dont la valeur propre a la plus grande valeur absolue. Ainsi, pour savoir si le *Monopoly* est équitable, il suffit d'explicitier la matrice *M* et d'appliquer l'analyse matricielle. C'était particulièrement facile, dans mon modèle simplifié du jeu, mais, dans le jeu réel, il faut tenir compte des rôles multiples des dés, des cases spéciales telles que *Allez en prison*, et des instructions données par les cartes que tirent les joueurs quand ils arrivent sur une case *Chance* ou *Caisse de communauté*.

De nombreux lecteurs m'ont fait part de leur analyse du jeu ; examinons une synthèse de leurs résultats (tous les modèles de *Monopoly* simplifient le jeu ; les différences entre les hypothèses ne sont pas importantes).

LES DOUBLES ET LA PRISON

La première modification de mon modèle initial est la prise en compte des règles relatives aux dés : si les dés marquent deux valeurs identiques, le joueur rejoue, mais trois doubles consécutifs l'envoient en prison. Le lancement des dés est, à lui seul, une petite chaîne de Markov, qui doit être traitée par la méthode usuelle. Le résultat est un graphe de la probabilité de déplacement d'une distance quelconque à partir de la position initiale (voir la figure 1). Notez que la distance la plus probable est 7 et qu'un joueur peut se déplacer au maximum de 35 cases (en lançant $6 + 6, 6 + 6, 6 + 6$). En outre, les déplacements de plus de 29 cases sont si peu probables qu'ils ne sont pas visibles sur un graphe à cette échelle. On incorpore ces résultats dans la matrice *M* en ajustant chaque coefficient.

Incluons ensuite l'effet du *Allez en prison*. Les règles carcérales posent un problème, car un joueur peut choisir d'acheter sa liberté, ou de rester en prison et d'essayer de lancer des doubles qui l'en sortiraient (ou encore, lorsque la prison devient un refuge contre des loyers élevés, de rester en prison et d'espérer n'obtenir aucun double). Les probabilités associées à ces choix dépendent de la psychologie des joueurs, champ que les chaînes de Markov décrivent mal. La plupart des lecteurs qui m'ont écrit ont contourné cette difficulté en supposant que le joueur n'achète pas sa liberté. La case *En prison* n'est alors plus une simple case, mais un sous-processus markovien : une suite de trois cases (virtuelles) où les joueurs vont de *Juste en prison*, à *En prison depuis un tour* et à



1. La probabilité de déplacement d'un nombre de cases en un lancer, compte tenu des règles de lancement des dés, est maximale pour le déplacement de sept cases. Quand un joueur tire un double, il relance les dés ; trois doubles consécutifs l'envoient en prison.