

Le Monopoly revisité

IAN STEWART

Le jeu est équitable, mais, à long terme, toutes les cases ne sont pas équiprobables.

En juin 1996, nous avons examiné un modèle mathématique du jeu de *Monopoly*. Au début du jeu, lorsque tous les joueurs sortent de la case *Départ*, en lançant une paire de dés, ils ont des probabilités variées d'atteindre les douze premières cases. En utilisant des objets mathématiques nommés «chaînes de Markov», nous avons vu que la répartition initiale des probabilités d'occupation des cases se nivelait progressivement, et nous avons conclu que le jeu est équitable : tous les joueurs ont la même probabilité d'occuper une case quelconque et d'acheter la rue qui lui correspond. Toutefois ce résultat n'est vrai qu'au prix de simplifications, et les adeptes du *Monopoly* m'ont fait remarquer que, dans le vrai jeu, la répartition à long terme n'est pas équiprobable.

Quelle est la véritable répartition ? La méthode des chaînes de Markov s'applique également au véritable jeu, mais l'analyse est complexe et impose un recours à l'aide informatique. Avant tout, revoyons comment les chaînes de Markov s'appliquent au *Monopoly*. Un joueur peut être sur n'importe laquelle des 40 cases du plateau que, par commodité, nous numérotions dans le sens des aiguilles d'une montre, de 0 pour la case *Départ*, à 39 pour la *Rue de la Paix*.

Entre deux cases *A* et *B*, la probabilité de transition est le nombre qui exprime la probabilité qu'un joueur partant de *A* atteigne *B* à son prochain lancer des dés. Si le déplacement est impossible, la probabilité de transition est nulle.

Il existe 40×40 , soit 1 600 probabilités de transition, que l'on représente dans une matrice carrée M (un tableau de nombres) à 40 lignes et à 40 colonnes. Par exemple, le coefficient de la sixième ligne et de la dixième colonne est la probabilité de passer de la *Gare Montparnasse* à l'*Avenue de la République* en un coup. Les probabilités d'occupation initiales, pour tout joueur, sont égales à 1 pour la position 0, et à 0 pour les autres cases ; on peut les représenter par un vecteur $v = (1, 0, 0, \dots, 0)$.

La théorie des chaînes de Markov indique que l'évolution de cette répartition de probabilités est donnée par la suite de vecteurs $v, Mv, M^2v, M^3v, \dots$, où chaque lancer de dés correspond au produit de M par le vecteur précédent de la suite. Les programmes d'ordinateur calculent de telles suites, ainsi que les valeurs propres et vecteurs propres des matrices. Un vecteur u est un vecteur propre de M , associé à la valeur propre c , si Mu est égal à cu : le produit d'une matrice par un vecteur propre donne un vecteur proportionnel au vecteur propre. Le théorème

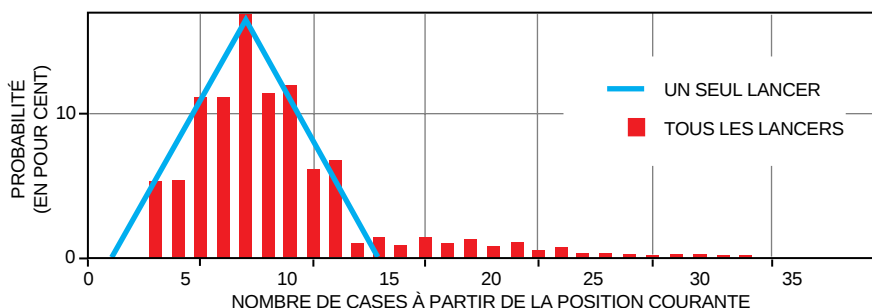
central de Markov stipule que la répartition à long terme est donnée par le vecteur propre dont la valeur propre a la plus grande valeur absolue. Ainsi, pour savoir si le *Monopoly* est équitable, il suffit d'explicitier la matrice M et d'appliquer l'analyse matricielle. C'était particulièrement facile, dans mon modèle simplifié du jeu, mais, dans le jeu réel, il faut tenir compte des rôles multiples des dés, des cases spéciales telles que *Allez en prison*, et des instructions données par les cartes que tirent les joueurs quand ils arrivent sur une case *Chance* ou *Caisse de communauté*.

De nombreux lecteurs m'ont fait part de leur analyse du jeu ; examinons une synthèse de leurs résultats (tous les modèles de *Monopoly* simplifient le jeu ; les différences entre les hypothèses ne sont pas importantes).

LES DOUBLES ET LA PRISON

La première modification de mon modèle initial est la prise en compte des règles relatives aux dés : si les dés marquent deux valeurs identiques, le joueur rejoue, mais trois doubles consécutifs l'envoient en prison. Le lancement des dés est, à lui seul, une petite chaîne de Markov, qui doit être traitée par la méthode usuelle. Le résultat est un graphe de la probabilité de déplacement d'une distance quelconque à partir de la position initiale (voir la figure 1). Notez que la distance la plus probable est 7 et qu'un joueur peut se déplacer au maximum de 35 cases (en lançant $6 + 6, 6 + 6, 6 + 6$). En outre, les déplacements de plus de 29 cases sont si peu probables qu'ils ne sont pas visibles sur un graphe à cette échelle. On incorpore ces résultats dans la matrice M en ajustant chaque coefficient.

Incluons ensuite l'effet du *Allez en prison*. Les règles carcérales posent un problème, car un joueur peut choisir d'acheter sa liberté, ou de rester en prison et d'essayer de lancer des doubles qui l'en sortiraient (ou encore, lorsque la prison devient un refuge contre des loyers élevés, de rester en prison et d'espérer n'obtenir aucun double). Les probabilités associées à ces choix dépendent de la psychologie des joueurs, champ que les chaînes de Markov décrivent mal. La plupart des lecteurs qui m'ont écrit ont contourné cette difficulté en supposant que le joueur n'achète pas sa liberté. La case *En prison* n'est alors plus une simple case, mais un sous-processus markovien : une suite de trois cases (virtuelles) où les joueurs vont de *Juste en prison*, à *En prison depuis un tour* et à



1. La probabilité de déplacement d'un nombre de cases en un lancer, compte tenu des règles de lancement des dés, est maximale pour le déplacement de sept cases. Quand un joueur tire un double, il relance les dés ; trois doubles consécutifs l'envoient en prison.

Sortie de prison au prochain tour. La probabilité d'occupation de la case *Allez en prison* est nulle, puisque personne ne l'occupe.

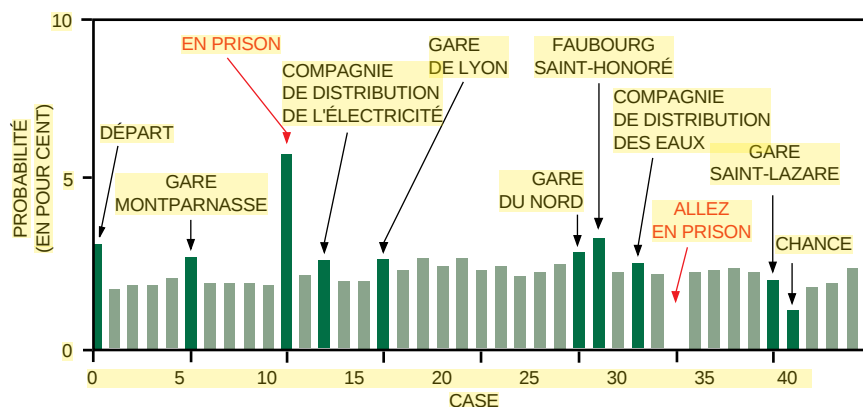
L'étape suivante de la description consiste à modifier la matrice M afin de tenir compte des cases *Chance* et *Caisse de communauté*, qui peuvent envoyer un joueur en prison ou sur toute autre position du plateau. On peut incorporer ce raffinement en comptant la proportion de cartes qui envoient les joueurs sur les diverses cases. La probabilité associée est alors ajoutée au coefficient correspondant de la matrice.

La matrice de transition ainsi précisée, on détermine les probabilités à long terme, soit en calculant numériquement ses valeurs propres et ses vecteurs propres, soit en calculant l'effet d'un grand nombre de mouvements à partir des matrices M^2 , M^3 , M^4 ... Le théorème général de Markov indique que ces méthodes sont mathématiquement équivalentes.

Les probabilités à long terme d'occupation des diverses cases sont indiquées sur la figure 2. On voit que les joueurs risquent deux fois plus d'occuper la case *En prison* (5,89... pour cent) que n'importe quelle autre case. La case la plus probable, après la prison, est le *Faubourg Saint-Honoré* (3,18... pour cent). La *Gare du Nord* est la plus fréquentée de toutes les gares (3,06... pour cent), tandis que la *Gare Saint-Lazare* est largement désaffectée (2,44... pour cent) : aucune carte *Chance* ne lui est associée. Parmi les services, la *Compagnie de distribution des eaux* (2,81... pour cent) l'emporte de peu sur la *Compagnie de distribution de l'électricité* (2,62... pour cent). La case *Départ* est la troisième case la plus probable (3,11... pour cent), et la troisième case *Chance* (0,87... pour cent) est la moins probable de toutes, la prison exceptée (0 pour cent, pour les raisons évoquées précédemment).

INVESTISSEMENTS

Un ingénieur de la Société *Boeing*, Thomas Friddell, a poussé l'analyse plus loin et a analysé le marché des propriétés. Il voulait trouver le seuil de rentabilité pour acheter des maisons, c'est-à-dire le niveau à partir duquel les revenus deviendraient supérieurs aux coûts, et déterminer les meilleures stratégies pour les achats de maisons et d'hôtels. Les exigences du marché des propriétés dépendent du nombre de joueurs et de la version des règles qu'ils adoptent. Si l'on admet que les maisons peuvent être achetées dès le début du jeu, l'analyse dégage plusieurs principes généraux. Bien que l'achat d'une maison, au début du jeu, soit plus gênant, le seuil de

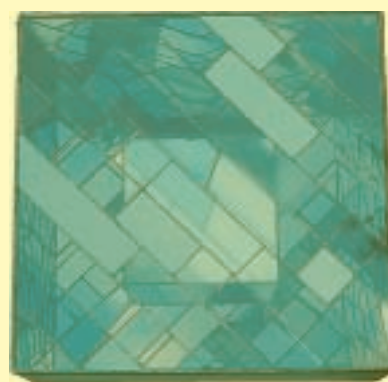


2. La répartition des probabilités à long terme montre que la case *En prison* est celle dont l'occupation est la plus probable.

Réaction

Les sculptures d'Alan Saint George (voir *La sculpture et les nombres*, Pour la Science, août 1996) m'ont valu un courrier abondant : de nombreux lecteurs se sont demandé comment réaliser des objets tridimensionnels à base de polyèdres réguliers. William Sheppard, de Columbus (Ohio), m'a fait parvenir les détails de son astucieuse méthode de découpe de tétraèdres ou d'octaèdres réguliers dans du bois, en ajoutant que «des modèles solides, pleins, sont préférables à ceux que l'on obtient en collant des triangles équilatéraux». Il avait publié ses méthodes dans le *Journal of Chemical Education* (vol. 44, p. 683, novembre 1967).

Norman Gallatin, de l'Iowa, a étudié les solides platoniciens pendant un quart de siècle et réalisé de remarquables sculptures, parfois à l'aide de miroirs. L'image ci-contre représente une projection tridimensionnelle d'un hypercube quadridimensionnel ; un astucieux usage de réflexions crée un effet complexe à partir de composants simples. D'autres sculpteurs ou fabricants d'objets mathématiques ont-ils des réalisations aussi étonnantes ?



Vue de l'Hypercube III

rentabilité est plus vite atteint. Trois maisons procurent un net avantage. Entre *Départ* et *Boulevard Malesherbes*, la case de meilleur rapport pour trois maisons est *Place Pigalle*. Les propriétés au-delà du *Boulevard Malesherbes* ne furent pas évaluées : T. Friddell m'a écrit qu'il avait arrêté ses calculs, parce qu'il craignait que les résultats ne soient pas publiés. Pour quelqu'un qui évalue des probabilités, ce n'est pas fort !

Nombre d'autres lecteurs ont fait des observations intéressantes. Ainsi le jeu reste équitable bien que les probabilités d'occupation des cases ne soient pas égales, puisque la répartition calculée est identique pour tous les joueurs.

Vous avez peut-être déjà eu l'impression que les cases *Avenue Mozart*, *Boulevard Saint-Michel* et *Place Pigalle* sont particulièrement intéressantes, en raison de la forte probabilité de les atteindre en sortant de prison. Cette

impression est confirmée par les calculs, qui montrent que ces trois propriétés sont parmi les douze meilleures. Un lecteur m'a reproché d'avoir insinué que les propriétés bon marché furent placées près du *Départ* pour répartir plus également les chances. Il a signalé que, dans la plupart des tournois de *Monopoly*, les propriétés bon marché sont stratégiquement importantes : comme les propriétés lucratives sont coûteuses à l'achat et à la construction, on ne peut les posséder sans des revenus provenant de propriétés bon marché. Je l'admets, bien que je persiste à signaler que le placement d'une propriété lucrative dans la première moitié du plateau aurait créé des inégalités, en vertu du critère selon lequel aucun joueur ne peut gagner un grand avantage purement par chance. Et je ne suis guère convaincu qu'acheter un grand nombre de propriétés bon marché, puis de les louer, soit une stratégie de pauvre !