

Sortie de prison au prochain tour. La probabilité d'occupation de la case *Allez en prison* est nulle, puisque personne ne l'occupe.

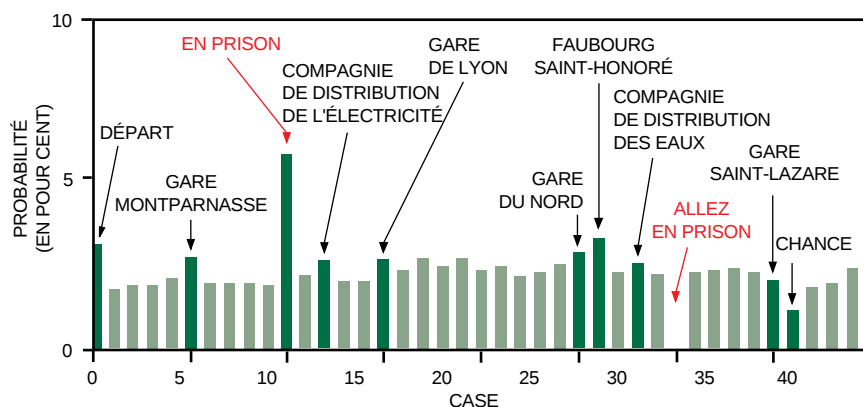
L'étape suivante de la description consiste à modifier la matrice M afin de tenir compte des cases *Chance* et *Caisse de communauté*, qui peuvent envoyer un joueur en prison ou sur toute autre position du plateau. On peut incorporer ce raffinement en comptant la proportion de cartes qui envoient les joueurs sur les diverses cases. La probabilité associée est alors ajoutée au coefficient correspondant de la matrice.

La matrice de transition ainsi précisée, on détermine les probabilités à long terme, soit en calculant numériquement ses valeurs propres et ses vecteurs propres, soit en calculant l'effet d'un grand nombre de mouvements à partir des matrices M^2 , M^3 , M^4 ... Le théorème général de Markov indique que ces méthodes sont mathématiquement équivalentes.

Les probabilités à long terme d'occupation des diverses cases sont indiquées sur la figure 2. On voit que les joueurs risquent deux fois plus d'occuper la case *En prison* (5,89... pour cent) que n'importe quelle autre case. La case la plus probable, après la prison, est le *Faubourg Saint-Honoré* (3,18... pour cent). La *Gare du Nord* est la plus fréquentée de toutes les gares (3,06... pour cent), tandis que la *Gare Saint-Lazare* est largement désaffectée (2,44... pour cent) : aucune carte *Chance* ne lui est associée. Parmi les services, la *Compagnie de distribution des eaux* (2,81... pour cent) l'emporte de peu sur la *Compagnie de distribution de l'électricité* (2,62... pour cent). La case *Départ* est la troisième case la plus probable (3,11... pour cent), et la troisième case *Chance* (0,87... pour cent) est la moins probable de toutes, la prison exceptée (0 pour cent, pour les raisons évoquées précédemment).

INVESTISSEMENTS

Un ingénieur de la Société *Boeing*, Thomas Friddell, a poussé l'analyse plus loin et a analysé le marché des propriétés. Il voulait trouver le seuil de rentabilité pour acheter des maisons, c'est-à-dire le niveau à partir duquel les revenus devaient être supérieurs aux coûts, et déterminer les meilleures stratégies pour les achats de maisons et d'hôtels. Les exigences du marché des propriétés dépendent du nombre de joueurs et de la version des règles qu'ils adoptent. Si l'on admet que les maisons peuvent être achetées dès le début du jeu, l'analyse dégage plusieurs principes généraux. Bien que l'achat d'une maison, au début du jeu, soit plus gênant, le seuil de



2. La répartition des probabilités à long terme montre que la case *En prison* est celle dont l'occupation est la plus probable.

Réaction

Les sculptures d'Alan Saint George (voir *La sculpture et les nombres*, Pour la Science, août 1996) m'ont valu un courrier abondant : de nombreux lecteurs se sont demandé comment réaliser des objets tridimensionnels à base de polyèdres réguliers. William Sheppard, de Columbus (Ohio), m'a fait parvenir les détails de son astucieuse méthode de découpe de tétraèdres ou d'octaèdres réguliers dans du bois, en ajoutant que «des modèles solides, pleins, sont préférables à ceux que l'on obtient en collant des triangles équilatéraux». Il avait publié ses méthodes dans le *Journal of Chemical Education* (vol. 44, p. 683, novembre 1967).

Norman Gallatin, de l'Iowa, a étudié les solides platoniciens pendant un quart de siècle et réalisé de remarquables sculptures, parfois à l'aide de miroirs. L'image ci-contre représente une projection tridimensionnelle d'un hypercube quadrimensionnel ; un astucieux usage de réflexions crée un effet complexe à partir de composants simples. D'autres sculpteurs ou fabricants d'objets mathématiques ont-ils des réalisations aussi étonnantes ?



Vue de l'Hypercube III

rentabilité est plus vite atteint. Trois maisons procurent un net avantage. Entre *Départ* et *Boulevard Malesherbes*, la case de meilleur rapport pour trois maisons est *Place Pigalle*. Les propriétés au-delà du *Boulevard Malesherbes* ne furent pas évaluées : T. Friddell m'a écrit qu'il avait arrêté ses calculs, parce qu'il craignait que les résultats ne soient pas publiés. Pour quelqu'un qui évalue des probabilités, ce n'est pas fort !

Nombre d'autres lecteurs ont fait des observations intéressantes. Ainsi le jeu reste équitable bien que les probabilités d'occupation des cases ne soient pas égales, puisque la répartition calculée est identique pour tous les joueurs.

Vous avez peut-être déjà eu l'impression que les cases *Avenue Mozart*, *Boulevard Saint-Michel* et *Place Pigalle* sont particulièrement intéressantes, en raison de la forte probabilité de les atteindre en sortant de prison. Cette

impression est confirmée par les calculs, qui montrent que ces trois propriétés sont parmi les douze meilleures. Un lecteur m'a reproché d'avoir insinué que les propriétés bon marché furent placées près du *Départ* pour répartir plus également les chances. Il a signalé que, dans la plupart des tournois de *Monopoly*, les propriétés bon marché sont stratégiquement importantes : comme les propriétés lucratives sont coûteuses à l'achat et à la construction, on ne peut les posséder sans des revenus provenant de propriétés bon marché. Je l'admets, bien que je persiste à signaler que le placement d'une propriété lucrative dans la première moitié du plateau aurait créé des inégalités, en vertu du critère selon lequel aucun joueur ne peut gagner un grand avantage purement par chance. Et je ne suis guère convaincu qu'acheter un grand nombre de propriétés bon marché, puis de les louer, soit une stratégie de pauvre !

Obsession de π

JEAN-PAUL DELAHAYE

Grâce à une nouvelle formule pour π , on sait calculer (en base 2) le 400 milliardième chiffre de π sans connaître les autres.

En 1995, nombreux étaient ceux qui pensaient qu'il n'y avait plus grand-chose de spectaculaire à attendre concernant π : sans doute allait-on continuer à progresser dans le calcul des décimales, mais cela se ferait au rythme régulier du perfectionnement des machines, et non pas grâce à des avancées mathématiques nouvelles. La découverte d'une nouvelle formule pour π par une équipe canadienne de l'Université Simon Fraser, à Burnaby, en Colombie-Britannique, et les conséquences de cette découverte prouvent que π reste à la fois riche et énigmatique.

On sait calculer aujourd'hui presque aussi loin que l'on veut les chiffres du nombre π (hélas, en binaire ou en base 16, pas encore dans le système décimal).

LES MACHINES... NE FONT PAS TOUT

Un livre d'histoire sur le calcul de π énonçait, en 1970, qu'il n'y aurait plus rien de nouveau concernant le quadrimillénaire nombre π . Or, dès 1975, la découverte de nouveaux algorithmes de calcul de π et l'application des méthodes de multiplication rapide donnaient un coup d'accélérateur au calcul des décimales de π , ce qui permettait, en quelques années, de passer du million de déci-

males connues (record atteint, en 1973, par les Français Jean Guilloud et Martine Bouyer) aux six milliards quatre cents millions de décimales en 1995 (record actuel du Japonais Yasumasa Kanada).

Les progrès des microprocesseurs seuls auraient permis de passer de 1 à 500 millions, au mieux, entre 1973 et 1995. L'histoire de π l'avait déjà montré : le progrès mathématique est essentiel pour aller plus loin dans le calcul de ses chiffres, et c'est ce qui donne du sens à cette course (outre l'utilité parfois évoquée de ces calculs pour tester les ordinateurs et leurs logiciels). La méthode que nous allons examiner est d'une nature bien différente, et plus révolutionnaire encore que les méthodes de multiplication rapide : elle est fondée sur la découverte d'une formule qui permet le calcul des chiffres de π très loin sans avoir à calculer ceux qui précèdent.

Selon Stan Wagon, ce nouveau progrès constitue un changement de direction radical dans le cours d'une histoire pourtant aussi ancienne que celle des mathématiques. Il y a quelques mois, si vous aviez demandé à un mathématicien s'il jugeait possible de sauter au dix-milliardième chiffre de π sans avoir à en calculer les précédents, il vous aurait ri au nez : pour tout le monde,

c'était impossible. Les mathématiciens sont parfois persuadés, sans véritable preuve, mais en s'appuyant sur leur fameuse et trop commode intuition, de certaines impossibilités qu'un illuminé ou simplement un mathématicien génial sans complexe vient balayer d'un revers de main.

En 1989, les frères Borwein, grands spécialistes des méthodes de calcul de π (voir *Les mathématiciens, Pour la Science*, 1996), écrivaient : «Il est raisonnable de spéculer que calculer le n -ième chiffre de π n'est pas vraiment plus facile que calculer tous les chiffres jusqu'au n -ième.» Il est amusant de remarquer que l'un des frères Borwein appartient à l'équipe qui a démenti ce jugement !

UNE FORMULE NOUVELLE

La découverte de la nouvelle formule est datée avec une grande précision (sans doute grâce aux sauvegardes des fichiers informatiques contenant les traces des calculs qui ont conduit à sa découverte) : le 19 septembre 1995, à 0h29, Simon Plouffe, après un mois de recherche à tâtons, dans le cadre de travaux menés avec David Bailey et Peter Borwein, en s'aidant du programme de calcul formel PSLQ, mais pleinement conscient de ce qu'il cherche (l'utilisation de moyens informatiques pour faire des mathématiques ne signifie pas que le mathématicien devient idiot!), trouve que :

$$\pi = \left(\frac{4}{1} - \frac{2}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{4}{8+1} - \frac{2}{8+4} - \frac{1}{8+5} - \frac{1}{8+6} \right) + \frac{1}{16^2} \left(\frac{4}{16+1} - \frac{2}{16+4} - \frac{1}{16+5} - \frac{1}{16+6} \right) + \dots$$

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right)$$

Cette fantastique formule permet de calculer n'importe quel chiffre de π en base 2 : vous pouvez calculer directement le 40 milliardième chiffre de π sans calculer les précédents. D'ailleurs, l'équipe canadienne l'a calculé : c'est un '1' suivi de 0010010. Aujourd'hui, personne n'a calculé les 40 milliards de chiffres binaires de π qui précèdent (on y arrivera sans doute dans quelques années, mais, pour l'instant, c'est impossible ou d'un coût tellement énorme que personne ne peut se payer cette folie).

Tout récemment, le 7 octobre 1996, Fabrice Bellard, de l'IRISA, à Rennes, en utilisant les mêmes techniques, a réussi à atteindre le 400 milliardième chiffre binaire de π , qui est aussi un '1' suivi cette fois de 001110000111000.

Pour le calcul de tous les chiffres de π , la nouvelle formule n'est pas exceptionnelle (comparée à d'autres, par exemple, dues à Ramanujan). Voici ce qu'on trouve

CALCUL DU CHIFFRE i (en base 16) DE π

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right)$$

Pour connaître le i ème chiffre en base 16 de π , on peut négliger les termes trop petits de cette série. Il n'en reste qu'un nombre fini que l'on traite séparément. Pour chacun d'eux on calcule quelques chiffres à droite du i ème chiffre. Le i ème chiffre du résultat, la valeur de π , ne dépend que de ces quelques chiffres pris à droite du i ème dans chaque terme.

