Obsession de π

JEAN-PAUL DELAHAYE

Grâce à une nouvelle formule pour π, on sait calculer (en base 2) le 400 milliardième chiffre de π sans connaître les autres.

En 1995, nombreux étaient ceux qui pensaient qu'il n'y avait plus grand-chose de spectaculaire à attendre concernant π : sans doute allait-on continuer à progresser dans le calcul des décimales, mais cela se ferait au rythme régulier du perfectionnement des machines, et non pas grâce à des avancées mathématiques nouvelles. La découverte d'une nouvelle formule pour π par une équipe canadienne de l'Université Simon Fraser, à Burnaby, en Colombie-Britannique, et les conséquences de cette découverte prouvent que π reste à la fois riche et énigmatique.

On sait calculer aujourd'hui presque aussi loin que l'on veut les chiffres du nombre π (hélas, en binaire ou en base 16, pas encore dans le système décimal).

LES MACHINES... NE FONT PAS TOUT

Un livre d'histoire sur le calcul de π énonçait, en 1970, qu'il n'y aurait plus rien de nouveau concernant le quadrimillénaire nombre π. Or, dès 1975, la découverte de nouveaux algorithmes de calcul de π et l'application des méthodes de multiplication rapide donnaient un coup d'accélérateur au calcul des décimales de π, ce qui permettait, en quelques années, de passer du million de décimales connues (record atteint, en 1973, par les Français Jean Guilloud et Martine Bouyer) aux six milliards quatre cents millions de décimales en 1995 (record actuel du Japonais Yasumasa Kanada).

Les progrès des microprocesseurs seuls auraient permis de passer de 1 à 500 millions, au mieux, entre 1973 et 1995. L'histoire de π l'avait déjà montré : le progrès mathématique est essentiel pour aller plus loin dans le calcul de ses chiffres, et c'est ce qui donne du sens à cette course (outre l'utilité parfois évoquée de ces calculs pour tester les ordinateurs et leurs logiciels). La méthode que nous allons examiner est d'une nature bien différente, et plus révolutionnaire encore que les méthodes de multiplication rapide : elle est fondée sur la découverte d'une formule qui permet le calcul des chiffres de π très loin sans avoir à calculer ceux qui précèdent.

Selon Stan Wagon, ce nouveau progrès constitue un changement de direction radical dans le cours d'une histoire pourtant aussi ancienne que celle des mathématiques. Il y a quelques mois, si vous aviez demandé à un mathématicien s'il jugeait possible de sauter au dix-milliardième chiffre de π sans avoir à en calculer les précédents, il vous aurait ri au nez : pour tout le monde, c'était impossible. Les mathématiciens sont parfois persuadés, sans véritable preuve, mais en s'appuyant sur leur fameuse et trop commode intuition, de certaines impossibilités qu'un illuminé ou simplement un mathématicien génial sans complexe vient balayer d'un revers de main.

En 1989, les frères Borwein, grands spécialistes des méthodes de calcul de π (voir *Les mathématiciens*, *Pour la Science*, 1996), écrivaient : «Il est raisonnable de spéculer que calculer le *n*-ième chiffre de π n'est pas vraiment plus facile que calculer tous les chiffres jusqu'au *n*-ième.» Il est amusant de remarquer que l'un des frères Borwein appartient à l'équipe qui a démenti ce jugement !

UNE FORMULE NOUVELLE

La découverte de la nouvelle formule est datée avec une grande précision (sans doute grâce aux sauvegardes des fichiers informatiques contenant les traces des calculs qui ont conduit à sa découverte) : le 19 septembre 1995, à 0h29, Simon Plouffe, après un mois de recherche à tâtons, dans le cadre de travaux menés avec David Bailey et Peter Borwein, en s'aidant du programme de calcul formel PSLQ, mais pleinement conscient de ce qu'il cherche (l'utilisation de moyens informatiques pour faire des mathématiques ne signifie pas que le mathématicien devient idiot !), trouve que :

$$\pi = \left(\frac{4}{1} - \frac{2}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{4}{8+1} - \frac{2}{8+4} - \frac{1}{8+5} - \frac{1}{8+6}\right)$$
$$+ \frac{1}{16^2}\left(\frac{4}{16+1} - \frac{2}{16+4} - \frac{1}{16+5} - \frac{1}{16+6}\right) + \ldots..$$

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$$

Cette fantastique formule permet de calculer n'importe quel chiffre de π en base 2 : vous pouvez calculer directement le 40 milliardième chiffre de π sans calculer les précédents. D'ailleurs, l'équipe canadienne l'a calculé : c'est un '1' suivi de 0010010. Aujourd'hui, personne n'a calculé les 40 milliards de chiffres binaires de π qui précèdent (on y arrivera sans doute dans quelques années, mais, pour l'instant, c'est impossible ou d'un coût tellement énorme que personne ne peut se payer cette folie).

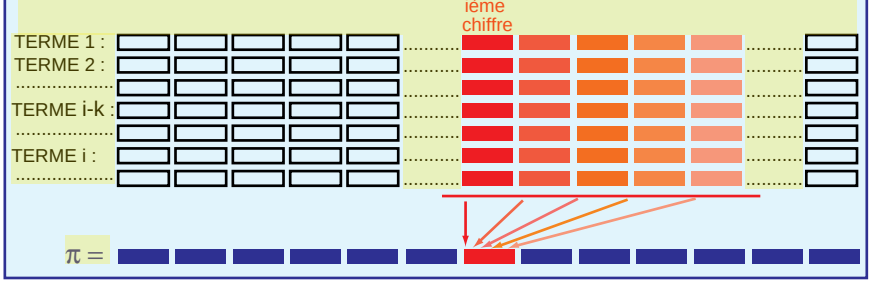
Tout récemment, le 7 octobre 1996, Fabrice Bellard, de l'IRISA, à Rennes, en utilisant les mêmes techniques, a réussi à atteindre le 400 milliardième chiffre binaire de π, qui est aussi un '1' suivi cette fois de 001110000111000.

Pour le calcul de tous les chiffres de π, la nouvelle formule n'est pas exceptionnelle (comparée à d'autres, par exemple, dues à Ramanujan). Voici ce qu'on trouve

CALCUL DU CHIFFRE i (en base 16) DE π

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$$

Pour connaître le ième chiffre en base 16 de π, on peut négliger les termes trop petits de cette série. Il n'en reste qu'un nombre fini que l'on traite séparément. Pour chacun d'eux on calcule quelques chiffres à droite du *ième* chiffre. Le *ième* chiffre du résultat, la valeur de π, ne dépend que de ces quelques chiffres pris à droite du *ième* dans chaque terme.



en calculant la somme $P(n)$ des n premiers termes de la somme infinie :
$P(1)=3.14142246642246642246642 2...$
$P(2)=3.14158739034658152305211 1...$
$P(3)=3.14159245756743538183700 4...$
$P(4)=3.14159264546033631955702 1...$
$P(5)=3.14159265322808753473437 8...$
$P(50)=3.14159265358979323846264338327950288419 7.$

LES CHIFFRES, MAIS PAS LES DÉCIMALES

Indiquons tout de suite qu'aucune formule analogue à celle-ci n'a été trouvée permettant d'accéder rapidement aux chiffres décimaux (c'est-à-dire en base 10) de π indépendamment les uns des autres.

Si c'est π en base 10 qui vous intéresse, rien ne vous permet encore de connaître la quarante milliardième décimale sans avoir calculé celles qui précèdent et donc, à moins de battre très sensiblement le record actuel, cette quarante milliardième décimale vous restera inconnue. En revanche, le passage de la base 2 à la base 4 ou 8 (ou plus généralement 2^n) peut se faire par petits bouts (on regroupe les chiffres), et inversement de la base 2^n à la base 2. Les premières tentatives (déjà très sérieuses) pour trouver une formule analogue à la nouvelle, mais adaptée à la base 10, ont pour l'instant échoué.

En décembre 1996, une méthode de calcul individuel des chiffres décimaux de π n'utilisant que très peu de mémoire (comme celle détaillée ici pour les chiffres binaires) a été proposée par S. Plouffe. Cette astucieuse méthode est fondée sur une ancienne formule de calcul de π et sur des propriétés particulières des coefficients du binôme de Newton. Avec cette méthode, la consommation d'une petite quantité de mémoire doit malheureusement se payer par une durée de calcul bien plus grande qui en empêche l'utilisation pratique pour battre de nouveaux records. Des améliorations de la méthode ne sont toutefois pas impossibles : en ce qui concerne la base 10, les espoirs se concrétisent.

La formule de Bailey-Borwein-Plouffe (que nous appellerons BBP) aurait pu être découverte depuis des siècles, notamment par Euler, qui en a trouvé tant de merveilleuses. En effet, rien dans sa démonstration n'est délicat ni extraordinaire : la difficulté était d'imaginer l'existence d'une telle formule, et de l'écrire. Il a fallu attendre 1995.

La formule BBP connue, d'autres formules analogues ont été découvertes en quelques mois, pour toutes sortes de constantes mathématiques : comme bien souvent dans le domaine scientifique, quand un coin du voile a été soulevé par une équipe, géniale ou chanceuse, tout un pan de montagne nouveau apparaît. C'est un véritable filon qu'a déterré l'équipe de l'Université Simon Fraser, et l'on n'a pas fini de faire marcher la pelle et la pioche. Peut-être d'ailleurs que ce filon contient des diamants plus gros que celui déjà extrait : l'effervescence règne.

Nous allons expliquer pourquoi la formule BBP permet le calcul du 400 milliardième chiffre binaire de π sans avoir à calculer ceux qui précèdent. Pour la comprendre, il suffit de savoir compter et de maîtriser le jeu des retenues dans une addition.

Comme nous sommes plus habitués à manipuler des nombres écrits en base 10 qu'en base 2 ou 16, nous expliquerons les idées du calcul avec des exemples en base 10. Évidemment ces explications s'adaptent à toutes les autres bases, et c'est en définitive en base 16 (et donc 2) qu'elles sont vraiment utiles.

COMMENT ON UTILISE LA FORMULE BBP

L'explication s'organise autour de quatre idées.

Idée 1. Lorsque l'on additionne de très grands nombres (par exemple, deux nombres de 200 chiffres chacun), on peut savoir ce qui se passe vers le milieu sans avoir à calculer beaucoup : le calcul d'une seule addition des deux chiffres en position 100 ne sera pas toujours suffisant,

NOM	DATE	NOMBRE DE DÉCIMALES
Babyloniens	2000 av. J.C.?	3,125 (3+1/8) 1
Égyptiens	2000 av. J.C.?	3,16045 $(16/9)^2$ 1
Chine	1200 av. J.C.?	3 1
Bible	550 av. J.C.	3 1
Archimède	250 av. J.C.	3,14185 3
Liu Hui	264	3,14159 5
Al-Kashi	1429	14
Van Ceulen	1609	34
Sharp	1699	71
Machin	1706	100
De Lagny	1719	127 calculées, 112 exactes
Rutherford	1824	208 calculées, 152 exactes
Strassnitzky, Dase	1844	200
Clausen	1847	248
Lehmann	1853	261
Rutherford	1853	440
Shanks	1874	707 calculées, 527 exactes
Ferguson	1-1947	710
Ferguson et Wrench	9-1947	808
Smith et Wrench	1949	1 120
Reitwiesner et al (ENIAC)	1949	2 037
Nicholson et Jeenel	1954	3 092
Felton	1957	7 480
Genuys	1-1958	10 000
Shanks et Wrench	1961	100 265
Guilloud et Bouyer	1973	1 001 250
Miyoshi et Kanada	1981	2 000 036
Tamura et Kanada	1982	8 388 576
Kanada, Yoshino et Tamura	1982	16 777 206
Gosper	1985	17 526 200
Bailey	1-1986	29 360 111
Kanada, Tamura, Kobo et al.	1-1987 6-1989	134 217 700
Chudnovsky	11-1989	525 229 270
Kanada et Tamura	5-1994	1 073 741 799
Chudnovsky	10-1995	4 044 000 000
Kanada	1996	6 442 450 938
Bailey-Borwein-Plouffe	1996	en base 2, sans calculer tout ce qui précède : 40 milliardième
Bellard	10-1996	en base 2, sans calculer tout ce qui précède : 400 milliardième