en calculant la somme $P(n)$ des $n$ premiers termes de la somme infinie :
$P(1)=3.14142246642246642246642 2...$
$P(2)=3.14158739034658152305211 1...$
$P(3)=3.14159245756743538183700 4...$
$P(4)=3.14159264546033631955702 1...$
$P(5)=3.14159265322808753473437 8...$
$P(50)=3.14159265358979323846264338327950288419 7.$

## LES CHIFFRES, MAIS PAS LES DÉCIMALES

Indiquons tout de suite qu'aucune formule analogue à celle-ci n'a été trouvée permettant d'accéder rapidement aux chiffres décimaux (c'est-à-dire en base 10) de $\pi$ indépendamment les uns des autres.

Si c'est $\pi$ en base 10 qui vous intéresse, rien ne vous permet encore de connaître la quarante milliardième décimale sans avoir calculé celles qui précèdent et donc, à moins de battre très sensiblement le record actuel, cette quarante milliardième décimale vous restera inconnue. En revanche, le passage de la base 2 à la base 4 ou 8 (ou plus généralement $2^n$) peut se faire par petits bouts (on regroupe les chiffres), et inversement de la base $2^n$ à la base 2. Les premières tentatives (déjà très sérieuses) pour trouver une formule analogue à la nouvelle, mais adaptée à la base 10, ont pour l'instant échoué.

En décembre 1996, une méthode de calcul individuel des chiffres décimaux de $\pi$ n'utilisant que très peu de mémoire (comme celle détaillée ici pour les chiffres binaires) a été proposée par S. Plouffe. Cette astucieuse méthode est fondée sur une ancienne formule de calcul de $\pi$ et sur des propriétés particulières des coefficients du binôme de Newton. Avec cette méthode, la consommation d'une petite quantité de mémoire doit malheureusement se payer par une durée de calcul bien plus grande qui en empêche l'utilisation pratique pour battre de nouveaux records. Des améliorations de la méthode ne sont toutefois pas impossibles : en ce qui concerne la base 10, les espoirs se concrétisent.

La formule de Bailey-Borwein-Plouffe (que nous appellerons BBP) aurait pu être découverte depuis des siècles, notamment par Euler, qui en a trouvé tant de merveilleuses. En effet, rien dans sa démonstration n'est délicat ni extraordinaire : la difficulté était d'imaginer l'existence d'une telle formule, et de l'écrire. Il a fallu attendre 1995.

La formule BBP connue, d'autres formules analogues ont été découvertes en quelques mois, pour toutes sortes de constantes mathématiques : comme bien souvent dans le domaine scientifique, quand un coin du voile a été soulevé par une équipe, géniale ou chanceuse, tout un pan de montagne nouveau apparaît. C'est un véritable filon qu'a déterré l'équipe de l'Université Simon Fraser, et l'on n'a pas fini de faire marcher la pelle et la pioche. Peut-être d'ailleurs que ce filon contient des diamants plus gros que celui déjà extrait : l'effervescence règne.

Nous allons expliquer pourquoi la formule BBP permet le calcul du 400 milliardième chiffre binaire de $\pi$ sans avoir à calculer ceux qui précèdent. Pour la comprendre, il suffit de savoir compter et de maîtriser le jeu des retenues dans une addition.

Comme nous sommes plus habitués à manipuler des nombres écrits en base 10 qu'en base 2 ou 16, nous expliquerons les idées du calcul avec des exemples en base 10. Évidemment ces explications s'adaptent à toutes les autres bases, et c'est en définitive en base 16 (et donc 2) qu'elles sont vraiment utiles.

## COMMENT ON UTILISE LA FORMULE BBP

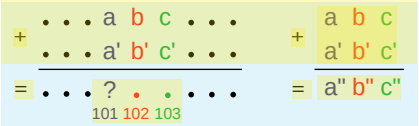
L'explication s'organise autour de quatre idées.

**Idée 1**. Lorsque l'on additionne de très grands nombres (par exemple, deux nombres de 200 chiffres chacun), on peut savoir ce qui se passe vers le milieu sans avoir à calculer beaucoup : le calcul d'une seule addition des deux chiffres en position 100 ne sera pas toujours suffisant,

| NOM | DATE | NOMBRE DE DÉCIMALES |
|---|---|---|
| Babyloniens | 2000 av. J.C.? | 3,125 (3+1/8) 1 |
| Égyptiens | 2000 av. J.C.? | 3,16045 $(16/9)^2$ 1 |
| Chine | 1200 av. J.C.? | 3 1 |
| Bible | 550 av. J.C. | 3 1 |
| Archimède | 250 av. J.C. | 3,14185 3 |
| Liu Hui | 264 | 3,14159 5 |
| Al-Kashi | 1429 | 14 |
| Van Ceulen | 1609 | 34 |
| Sharp | 1699 | 71 |
| Machin | 1706 | 100 |
| De Lagny | 1719 | 127 calculées, 112 exactes |
| Rutherford | 1824 | 208 calculées, 152 exactes |
| Strassnitzky, Dase | 1844 | 200 |
| Clausen | 1847 | 248 |
| Lehmann | 1853 | 261 |
| Rutherford | 1853 | 440 |
| Shanks | 1874 | 707 calculées, 527 exactes |
| Ferguson | 1-1947 | 710 |
| Ferguson et Wrench | 9-1947 | 808 |
| Smith et Wrench | 1949 | 1 120 |
| Reitwiesner et al (ENIAC) | 1949 | 2 037 |
| Nicholson et Jeenel | 1954 | 3 092 |
| Felton | 1957 | 7 480 |
| Genuys | 1-1958 | 10 000 |
| Shanks et Wrench | 1961 | 100 265 |
| Guilloud et Bouyer | 1973 | 1 001 250 |
| Miyoshi et Kanada | 1981 | 2 000 036 |
| Tamura et Kanada | 1982 | 8 388 576 |
| Kanada, Yoshino et Tamura | 1982 | 16 777 206 |
| Gosper | 1985 | 17 526 200 |
| Bailey | 1-1986 | 29 360 111 |
| Kanada, Tamura, Kobo et al. | 1-1987<br>6-1989 | 134 217 700 |
| Chudnovsky | 11-1989 | 525 229 270 |
| Kanada et Tamura | 5-1994 | 1 073 741 799 |
| Chudnovsky | 10-1995 | 4 044 000 000 |
| Kanada | 1996 | 6 442 450 938 |
| Bailey-Borwein-Plouffe | 1996 | en base 2, sans calculer tout ce qui précède : 40 milliardième |
| Bellard | 10-1996 | en base 2, sans calculer tout ce qui précède : 400 milliardième |

mais il n'y a pas besoin de grand-chose de plus.

Imaginons que nous voulions connaître le chiffre en position 100 de l'entier obtenu en additionnant le nombre de 200 chiffres $X$ = • • • *a b c* • • • qui comporte les chiffres décimaux *a, b* et *c* en position 100, 101 et 102 avec le nombre $Y$ = • • • *a'b'c'* • • • qui, lui, possède les chiffres décimaux *a', b'* et *c'* en position 100, 101 et 102.




Tout est une question de retenues. Supposons qu'on calcule la somme des deux entiers *abc* et *a'b'c'* comme on le ferait pour une addition habituelle de deux nombres entiers à trois chiffres et qu'on obtienne *a"b"c"*. Posons-nous la question : quand *a"* est-il bon? C'est-à-dire : quand *a"* est-il le chiffre qu'on obtiendrait en position 100 en faisant complètement l'addition des 200 chiffres de $X$ et des 200 chiffres de $Y$ ?

La réponse est simple : *a"* sera bon sauf si $b + b' = 9$ et $c + c' = 9$, car alors, tout dépendra de ce qui se passe à droite dans la grande addition. S'il y a une retenue à reporter, celle-ci se propagera jusqu'au $a + a'$ qu'il faudra changer, sinon elle ne se propagera pas. De cela, il résulte que, sauf malchance (au plus une fois sur 100), on tombera sur le bon chiffre *a"* dans l'addition en se contentant de calculer avec trois additions de deux chiffres. De plus, si malchance il y a, on le saura et on pourra donc aller voir un peu plus à droite et calculer avec quatre ou cinq chiffres pour être certain d'avoir le bon *a"*.

Donc, à condition d'aller voir un peu à droite (mais pas bien loin), on est certain de ce qu'on calcule au milieu de la grande addition sans avoir à la faire entièrement.

Ce principe s'applique aussi quand on additionne successivement plusieurs grands entiers ou quand on multiplie un grand entier par un petit entier (on appelle ainsi un entier de quelques chiffres, 30 ou 50 au plus) : on sait avec certitude ce qui se passe au milieu en se contentant de calculer un peu à droite de ce qui nous intéresse. «Un peu», en pratique, signifie quelques dizaines de chiffres, mais qu'est-ce qu'un calcul sur 30 chiffres ou 50 chiffres lorsqu'on évite la manipulation de milliards de chiffres.

Nous venons de voir qu'on peut additionner localement de grands entiers ou multiplier localement un grand entier par un petit. En revanche, ce n'est pas vrai pour la multiplication de deux grands entiers ou pour la division (sinon, il y a longtemps qu'on saurait calculer les chiffres de π par le milieu).

**Idée 2.** On peut calculer le *n*-ième chiffre (pensez à *n* égal à 10 milliards), d'un nombre de la forme $1/(k\ 16^i)$ en base 16 en ne faisant qu'une série de petits calculs.

Pour faciliter la compréhension, comme précédemment, nous nous plaçons en base 10, et nous allons expliquer comment on peut calculer le *n*-ième chiffre décimal de $1/(k\ 10^i)$ en ne faisant que des petits calculs. Prenons $n = 1\ 000$ (pour alléger un peu), $i = 35$, $k = 49$. Nous voulons calculer le 1 000e chiffre décimal de $1/(49\ 10^{35})$.

Chacun sait que, pour multiplier un nombre décimal par 10, il suffit de décaler la virgule d'un chiffre vers la droite. Donc, le 1 000e chiffre décimal de $1/(49\ 10^{35})$ est le 999e chiffre de $1/(49\ 10^{34})$, qui est le 998e de $1/(49\ 10^{33})$, etc. Donc, finalement, on a à calculer le 965e chiffre de 1/49.

En utilisant encore le principe du décalage, on trouve que ce chiffre est le même que le premier chiffre après la virgule de $10^{964}/49$.

Imaginons que nous réussissions à calculer le reste $r$ de la division de $10^{964}$ par 49 sans avoir à manipuler de grands nombres (c'est l'idée 3), alors : $10^{964} = 49\ q + r$, avec $q$ entier et $r < 49$, et donc : $10^{964}/49 = q + r/49$.

Puisque $q$ est un entier, le premier chiffre après la virgule de $10^{964}/49$ est le même que le premier chiffre après la virgule de $r/49$, ce qui est facile à déterminer (car $r < 49$) en faisant la division (qui est une division entre petits entiers).

Donc, au total (sous réserve qu'on puisse facilement calculer le reste de la division de $10^{964}$ par 49), nous savons comment calculer le 1 000e chiffre décimal de $1/(49\ 10^{35})$ et, plus généralement, n'importe quel chiffre isolé, même très loin en base *p,* d'un nombre de la forme $1/(n\ p^i)$ si $n$ est un petit entier.

**Idée 3.** Le calcul du reste de la division de $10^{964}$ par 49 est facile et peut se faire sans avoir à manipuler de grands nombres.

Pour calculer ce reste, on utilise «l'arithmétique modulo 49», qui consiste à soustraire 49 autant de fois que c'est nécessaire dès qu'on l'a dépassé. Par exemple, 35 + 45 = 80 = 31, 3 x 45 = 135 = 37, etc.

Le calcul du reste de la division de $10^{964}$ par 49 est alors ramené au calcul de $10^{964}$ dans cette «arithmétique modulo 49» où le module d'une somme est la somme des modules, etc., et l'on procède comme suit.

Calcul de proche en proche de $10^2$, $10^4$, $10^8$, etc., modulo 49 :
$10^2 = 100 = 2$ ; $10^4 = 2^2 = 4$ ; $10^8 = 4^2 = 16$ ; $10^{16} = 16^2 = 256 = 11$ ; $10^{32} = 11^2 = 121 = 23$ ; $10^{64} = 23^2 = 529 = 39$ ; $10^{128} = 39^2 = 1521 = 2$ ; $10^{256} = 2^2 = 4$ ; $10^{512} = 4^2 = 16$.
Décomposition de 964 en somme de puissance de 2 :
$964 = 512 + 256 + 128 + 64 + 4$
$10^{964} = 10^{512 + 256 + 128 + 64 + 4} =$
$16 \times 4 \times 2 \times 39 \times 4 = 25$.
On n'utilise que des petits nombres, et aucune manipulation n'est vraiment longue (même si, à la place de 1 000, on avait mené les calculs avec dix milliards).

**Idée 4**. On exploite maintenant la formule BBP, qui nous indique que le nombre π est une somme de termes dont pour chacun il est facile (d'après ce qu'on vient de voir) de connaître le 10-milliardième chiffre en base 16.

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$$

Il semble qu'il y ait quand même une difficulté, car cette somme est infinie. Mais $1/16^i$ diminue très rapidement quand $i$ augmente, et donc seuls les premiers termes de la série ont à être pris en compte (bien sûr, tout cela est soigneusement évalué). En définitive, connaître le dix-milliardième chiffre en base 16 de π a été ramené à une suite de petits calculs sur de petits entiers et on n'a jamais eu à mémoriser des milliards de chiffres comme cela était le cas pour toutes les méthodes de calcul de π jusqu'à présent (y compris la méthode du compte-gouttes).

Pour terminer le calcul et avoir les chiffres binaires de π, on utilise la connaissance du *n*-ième chiffre en base 16 de π. Ce *n*-ième chiffre donne les chiffres binaires de π de rang $4n - 3$, $4n - 2$, $4n - 1$ et $4n$ par remplacement de chaque chiffre en base 16 par quatre chiffres binaires en suivant la règle :
0 → 0000, 1 → 0001, 2 → 0010, 3 → 0011, 4 → 0100, 5 → 0101, 6 → 0110, 7 → 0111, 8 → 1000, 9 → 1001, A → 1010, B → 1011, C → 1100, D → 1101, E → 1110, F → 1111.

Voici quelques résultats donnés par D. Bailey, P. Borwein et S. Plouffe dans leur article sur la nouvelle formule et ses extensions. Précisons que D. Bailey fut le premier à atteindre 29 millions de décimales en 1986 (sa plaque minéralogique de voiture, paraît-il, est P314159) et que P. Borwein est connu pour avoir trouvé avec son frère de nombreuses et très efficaces formules de calcul de π, dont certaines sont utilisées par le Japonais Y. Kanada pour atteindre ses records ($A = 10$, $B = 11$, ..., $F = 15$).

π en base 16 à partir de la position :
$10^6$ : 26C65E52CB4593
$10^7$ : 17AF5863EFED8D
$10^8$ : ECB840E21926EC