

mais il n'y a pas besoin de grand-chose de plus.

Imaginons que nous voulions connaître le chiffre en position 100 de l'entier obtenu en additionnant le nombre de 200 chiffres $X = \dots a b c \dots$ qui comporte les chiffres décimaux a, b et c en position 100, 101 et 102 avec le nombre $Y = \dots a' b' c' \dots$ qui, lui, possède les chiffres décimaux a', b' et c' en position 100, 101 et 102.

$$\begin{array}{r}
 \dots a \ b \ c \dots \\
 + \dots a' \ b' \ c' \dots \\
 \hline
 = \dots ? \dots
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 a \ b \ c \\
 + a' \ b' \ c' \\
 \hline
 = a'' \ b'' \ c''
 \end{array}$$

101 102 103

Tout est une question de retenues. Supposons qu'on calcule la somme des deux entiers abc et $a'b'c'$ comme on le ferait pour une addition habituelle de deux nombres entiers à trois chiffres et qu'on obtienne $a''b''c''$. Posons-nous la question : quand a'' est-il bon ? C'est-à-dire : quand a'' est-il le chiffre qu'on obtiendrait en position 100 en faisant complètement l'addition des 200 chiffres de X et des 200 chiffres de Y ?

La réponse est simple : a'' sera bon sauf si $b + b' = 9$ et $c + c' = 9$, car alors, tout dépendra de ce qui se passe à droite dans la grande addition. S'il y a une retenue à reporter, celle-ci se propagera jusqu'au $a + a'$ qu'il faudra changer, sinon elle ne se propagera pas. De cela, il résulte que, sauf malchance (au plus une fois sur 100), on tombera sur le bon chiffre a'' dans l'addition en se contentant de calculer avec trois additions de deux chiffres. De plus, si malchance il y a, on le saura et on pourra donc aller voir un peu plus à droite et calculer avec quatre ou cinq chiffres pour être certain d'avoir le bon a'' .

Donc, à condition d'aller voir un peu à droite (mais pas bien loin), on est certain de ce qu'on calcule au milieu de la grande addition sans avoir à la faire entièrement.

Ce principe s'applique aussi quand on additionne successivement plusieurs grands entiers ou quand on multiplie un grand entier par un petit entier (on appelle ainsi un entier de quelques chiffres, 30 ou 50 au plus) : on sait avec certitude ce qui se passe au milieu en se contentant de calculer un peu à droite de ce qui nous intéresse. «Un peu», en pratique, signifie quelques dizaines de chiffres, mais qu'est-ce qu'un calcul sur 30 chiffres ou 50 chiffres lorsqu'on évite la manipulation de milliards de chiffres.

Nous venons de voir qu'on peut additionner localement de grands entiers ou multiplier localement un grand entier par un petit. En revanche, ce n'est pas vrai pour la multiplication de deux grands entiers ou pour la division (sinon, il y a

longtemps qu'on saurait calculer les chiffres de π par le milieu).

Idée 2. On peut calculer le n -ième chiffre (pensez à n égal à 10 milliards), d'un nombre de la forme $1/(k 16^i)$ en base 16 en ne faisant qu'une série de petits calculs.

Pour faciliter la compréhension, comme précédemment, nous nous plaçons en base 10, et nous allons expliquer comment on peut calculer le n -ième chiffre décimal de $1/(k 10^i)$ en ne faisant que des petits calculs. Prenons $n = 1\ 000$ (pour alléger un peu), $i = 35$, $k = 49$. Nous voulons calculer le 1 000^e chiffre décimal de $1/(49 10^{35})$.

Chacun sait que, pour multiplier un nombre décimal par 10, il suffit de décaler la virgule d'un chiffre vers la droite. Donc, le 1 000^e chiffre décimal de $1/(49 10^{35})$ est le 999^e chiffre de $1/(49 10^{34})$, qui est le 998^e de $1/(49 10^{33})$, etc. Donc, finalement, on a à calculer le 965^e chiffre de $1/49$.

En utilisant encore le principe du décalage, on trouve que ce chiffre est le même que le premier chiffre après la virgule de $10^{964}/49$.

Imaginons que nous réussissions à calculer le reste r de la division de 10^{964} par 49 sans avoir à manipuler de grands nombres (c'est l'idée 3), alors : $10^{964} = 49 q + r$, avec q entier et $r < 49$, et donc : $10^{964}/49 = q + r/49$.

Puisque q est un entier, le premier chiffre après la virgule de $10^{964}/49$ est le même que le premier chiffre après la virgule de $r/49$, ce qui est facile à déterminer (car $r < 49$) en faisant la division (qui est une division entre petits entiers).

Donc, au total (sous réserve qu'on puisse facilement calculer le reste de la division de 10^{964} par 49), nous savons comment calculer le 1 000^e chiffre décimal de $1/(49 10^{35})$ et, plus généralement, n'importe quel chiffre isolé, même très loin en base p , d'un nombre de la forme $1/(n p^i)$ si n est un petit entier.

Idée 3. Le calcul du reste de la division de 10^{964} par 49 est facile et peut se faire sans avoir à manipuler de grands nombres.

Pour calculer ce reste, on utilise «l'arithmétique modulo 49», qui consiste à soustraire 49 autant de fois que c'est nécessaire dès qu'on l'a dépassé. Par exemple, $35 + 45 = 80 = 31$, $3 \times 45 = 135 = 37$, etc.

Le calcul du reste de la division de 10^{964} par 49 est alors ramené au calcul de 10^{964} dans cette «arithmétique modulo 49» où le module d'une somme est la somme des modules, etc., et l'on procède comme suit.

Calcul de proche en proche de 10^2 , 10^4 , 10^8 , etc., modulo 49 :

$$10^2 = 100 = 2 ; 10^4 = 2^2 = 4 ; 10^8 = 4^2 = 16 ;$$

$$10^{16} = 16^2 = 256 = 11 ; 10^{32} = 11^2 = 121 = 23 ; 10^{64} = 23^2 = 529 = 39 ; 10^{128} = 39^2 = 1521 = 2 ; 10^{256} = 2^2 = 4 ; 10^{512} = 4^2 = 16.$$

Décomposition de 964 en somme de puissance de 2 :

$$964 = 512 + 256 + 128 + 64 + 4$$

$$10^{964} = 10^{512+256+128+64+4} =$$

$$16 \times 4 \times 2 \times 39 \times 4 = 25.$$

On n'utilise que des petits nombres, et aucune manipulation n'est vraiment longue (même si, à la place de 1 000, on avait mené les calculs avec dix milliards).

Idée 4. On exploite maintenant la formule BBP, qui nous indique que le nombre π est une somme de termes dont pour chacun il est facile (d'après ce qu'on vient de voir) de connaître le 10-milliardième chiffre en base 16.

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right)$$

Il semble qu'il y ait quand même une difficulté, car cette somme est infinie. Mais $1/16^i$ diminue très rapidement quand i augmente, et donc seuls les premiers termes de la série ont à être pris en compte (bien sûr, tout cela est soigneusement évalué). En définitive, connaître le dix-milliardième chiffre en base 16 de π a été ramené à une suite de petits calculs sur de petits entiers et on n'a jamais eu à mémoriser des milliards de chiffres comme cela était le cas pour toutes les méthodes de calcul de π jusqu'à présent (y compris la méthode du compte-gouttes).

Pour terminer le calcul et avoir les chiffres binaires de π , on utilise la connaissance du n -ième chiffre en base 16 de π . Ce n -ième chiffre donne les chiffres binaires de π de rang $4n - 3$, $4n - 2$, $4n - 1$ et $4n$ par remplacement de chaque chiffre en base 16 par quatre chiffres binaires en suivant la règle :

0 $\rightarrow$ 0000, 1 $\rightarrow$ 0001, 2 $\rightarrow$ 0010, 3 $\rightarrow$ 0011, 4 $\rightarrow$ 0100, 5 $\rightarrow$ 0101, 6 $\rightarrow$ 0110, 7 $\rightarrow$ 0111, 8 $\rightarrow$ 1000, 9 $\rightarrow$ 1001, A $\rightarrow$ 1010, B $\rightarrow$ 1011, C $\rightarrow$ 1100, D $\rightarrow$ 1101, E $\rightarrow$ 1110, F $\rightarrow$ 1111.

Voici quelques résultats donnés par D. Bailey, P. Borwein et S. Plouffe dans leur article sur la nouvelle formule et ses extensions. Précisons que D. Bailey fut le premier à atteindre 29 millions de décimales en 1986 (sa plaque minéralogique de voiture, paraît-il, est P314159) et que P. Borwein est connu pour avoir trouvé avec son frère de nombreuses et très efficaces formules de calcul de π , dont certaines sont utilisées par le Japonais Y. Kanada pour atteindre ses records (A = 10, B = 11, ..., F = 15).

π en base 16 à partir de la position :

$$10^6 : 26C65E52CB4593$$

$$10^7 : 17AF5863EFED8D$$

$$10^8 : ECB840E21926EC$$