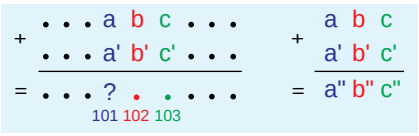
mais il n'y a pas besoin de grand-chose de plus.

Imaginons que nous voulions connaître le chiffre en position 100 de l'entier obtenu en additionnant le nombre de 200 chiffres X = • • • *a b c* • • • qui comporte les chiffres décimaux *a, b* et *c* en position 100, 101 et 102 avec le nombre Y = • • • *a'b'c'* • • • qui, lui, possède les chiffres décimaux *a', b'* et *c'* en position 100, 101 et 102.



Tout est une question de retenues. Supposons qu'on calcule la somme des deux entiers *abc* et *a'b'c'* comme on le ferait pour une addition habituelle de deux nombres entiers à trois chiffres et qu'on obtienne *a"b"c"*. Posons-nous la question : quand *a"* est-il bon? C'est-à-dire : quand *a"* est-il le chiffre qu'on obtiendrait en position 100 en faisant complètement l'addition des 200 chiffres de X et des 200 chiffres de Y ?

La réponse est simple : *a"* sera bon sauf si $b + b' = 9$ et $c + c' = 9$, car alors, tout dépendra de ce qui se passe à droite dans la grande addition. S'il y a une retenue à reporter, celle-ci se propagera jusqu'au $a + a'$ qu'il faudra changer, sinon elle ne se propagera pas. De cela, il résulte que, sauf malchance (au plus une fois sur 100), on tombera sur le bon chiffre *a"* dans l'addition en se contentant de calculer avec trois additions de deux chiffres. De plus, si malchance il y a, on le saura et on pourra donc aller voir un peu plus à droite et calculer avec quatre ou cinq chiffres pour être certain d'avoir le bon *a"*.

Donc, à condition d'aller voir un peu à droite (mais pas bien loin), on est certain de ce qu'on calcule au milieu de la grande addition sans avoir à la faire entièrement.

Ce principe s'applique aussi quand on additionne successivement plusieurs grands entiers ou quand on multiplie un grand entier par un petit entier (on appelle ainsi un entier de quelques chiffres, 30 ou 50 au plus) : on sait avec certitude ce qui se passe au milieu en se contentant de calculer un peu à droite de ce qui nous intéresse. «Un peu», en pratique, signifie quelques dizaines de chiffres, mais qu'est-ce qu'un calcul sur 30 chiffres ou 50 chiffres lorsqu'on évite la manipulation de milliards de chiffres.

Nous venons de voir qu'on peut additionner localement de grands entiers ou multiplier localement un grand entier par un petit. En revanche, ce n'est pas vrai pour la multiplication de deux grands entiers ou pour la division (sinon, il y a longtemps qu'on saurait calculer les chiffres de π par le milieu).

Idée 2. On peut calculer le *n*-ième chiffre (pensez à *n* égal à 10 milliards), d'un nombre de la forme $1/(k\ 16^i)$ en base 16 en ne faisant qu'une série de petits calculs.

Pour faciliter la compréhension, comme précédemment, nous nous plaçons en base 10, et nous allons expliquer comment on peut calculer le *n*-ième chiffre décimal de $1/(k\ 10^i)$ en ne faisant que des petits calculs. Prenons $n = 1\ 000$ (pour alléger un peu), $i = 35$, $k = 49$. Nous voulons calculer le 1 000e chiffre décimal de $1/(49\ 10^{35})$.

Chacun sait que, pour multiplier un nombre décimal par 10, il suffit de décaler la virgule d'un chiffre vers la droite. Donc, le 1 000e chiffre décimal de $1/(49\ 10^{35})$ est le 999e chiffre de $1/(49\ 10^{34})$, qui est le 998e de $1/(49\ 10^{33})$, etc. Donc, finalement, on a à calculer le 965e chiffre de 1/49.

En utilisant encore le principe du décalage, on trouve que ce chiffre est le même que le premier chiffre après la virgule de $10^{964}/49$.

Imaginons que nous réussissions à calculer le reste r de la division de 10^{964} par 49 sans avoir à manipuler de grands nombres (c'est l'idée 3), alors : $10^{964} = 49\ q + r$, avec q entier et $r < 49$, et donc : $10^{964}/49 = q + r/49$.

Puisque q est un entier, le premier chiffre après la virgule de $10^{964}/49$ est le même que le premier chiffre après la virgule de $r/49$, ce qui est facile à déterminer (car $r < 49$) en faisant la division (qui est une division entre petits entiers).

Donc, au total (sous réserve qu'on puisse facilement calculer le reste de la division de 10^{964} par 49), nous savons comment calculer le 1 000e chiffre décimal de $1/(49\ 10^{35})$ et, plus généralement, n'importe quel chiffre isolé, même très loin en base *p,* d'un nombre de la forme $1/(n\ p^i)$ si n est un petit entier.

Idée 3. Le calcul du reste de la division de 10^{964} par 49 est facile et peut se faire sans avoir à manipuler de grands nombres.

Pour calculer ce reste, on utilise «l'arithmétique modulo 49», qui consiste à soustraire 49 autant de fois que c'est nécessaire dès qu'on l'a dépassé. Par exemple, 35 + 45 = 80 = 31, 3 x 45 = 135 = 37, etc.

Le calcul du reste de la division de 10^{964} par 49 est alors ramené au calcul de 10^{964} dans cette «arithmétique modulo 49» où le module d'une somme est la somme des modules, etc., et l'on procède comme suit.

Calcul de proche en proche de 10^2, 10^4, 10^8, etc., modulo 49 :
$10^2 = 100 = 2$; $10^4 = 2^2 = 4$; $10^8 = 4^2 = 16$; $10^{16} = 16^2 = 256 = 11$; $10^{32} = 11^2 = 121 = 23$; $10^{64} = 23^2 = 529 = 39$; $10^{128} = 39^2 = 1521 = 2$; $10^{256} = 2^2 = 4$; $10^{512} = 4^2 = 16$.

Décomposition de 964 en somme de puissance de 2 :
$964 = 512 + 256 + 128 + 64 + 4$
$10^{964} = 10^{512 + 256 + 128 + 64 + 4} =$
$16 \times 4 \times 2 \times 39 \times 4 = 25$.

On n'utilise que des petits nombres, et aucune manipulation n'est vraiment longue (même si, à la place de 1 000, on avait mené les calculs avec dix milliards).

Idée 4. On exploite maintenant la formule BBP, qui nous indique que le nombre π est une somme de termes dont pour chacun il est facile (d'après ce qu'on vient de voir) de connaître le 10-milliardième chiffre en base 16.

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$$

Il semble qu'il y ait quand même une difficulté, car cette somme est infinie. Mais $1/16^i$ diminue très rapidement quand i augmente, et donc seuls les premiers termes de la série ont à être pris en compte (bien sûr, tout cela est soigneusement évalué). En définitive, connaître le dix-milliardième chiffre en base 16 de π a été ramené à une suite de petits calculs sur de petits entiers et on n'a jamais eu à mémoriser des milliards de chiffres comme cela était le cas pour toutes les méthodes de calcul de π jusqu'à présent (y compris la méthode du compte-gouttes).

Pour terminer le calcul et avoir les chiffres binaires de π, on utilise la connaissance du *n*-ième chiffre en base 16 de π. Ce *n*-ième chiffre donne les chiffres binaires de π de rang $4n - 3$, $4n - 2$, $4n - 1$ et $4n$ par remplacement de chaque chiffre en base 16 par quatre chiffres binaires en suivant la règle :
0 → 0000, 1 → 0001, 2 → 0010, 3 → 0011,
4 → 0100, 5 → 0101, 6 → 0110, 7 → 0111,
8 → 1000, 9 → 1001, A → 1010, B → 1011,
C → 1100, D → 1101, E → 1110, F → 1111.

Voici quelques résultats donnés par D. Bailey, P. Borwein et S. Plouffe dans leur article sur la nouvelle formule et ses extensions. Précisons que D. Bailey fut le premier à atteindre 29 millions de décimales en 1986 (sa plaque minéralogique de voiture, paraît-il, est P314159) et que P. Borwein est connu pour avoir trouvé avec son frère de nombreuses et très efficaces formules de calcul de π, dont certaines sont utilisées par le Japonais Y. Kanada pour atteindre ses records ($A = 10$, $B = 11$, ..., $F = 15$).

π en base 16 à partir de la position :
10^6 : 26C65E52CB4593
10^7 : 17AF5863EFED8D
10^8 : ECB840E21926EC

10^9 : 85895585A0428B
10^{10} : 921C73C6838FB2

Les auteurs ont programmé ces calculs sur les ordinateurs de la NASA, où D. Bailey travaille. Comme s'ils craignaient qu'on ne les accuse de dilapider l'argent du contribuable américain dans des calculs absurdes, ils précisent qu'ils n'ont utilisé les machines que pendant qu'elles étaient inoccupées.

LES CLASSES DE COMPLEXITÉ ET π

D'un point de vue théorique, qu'est-ce qu'apportent la nouvelle formule pour π et les formules du même genre trouvées depuis? Plusieurs choses importantes.

La classe de Steven SC_2 est celle des nombres dont on peut calculer les chiffres binaires en «temps polynomial» et en «espace log-polynomial». Lorsqu'un nombre est dans SC_2, pour en connaître le *n*-ième chiffre binaire, on doit calculer pendant (par exemple) n^2 secondes et utiliser log *n* mémoires : le temps de calcul augmente, en fonction du numéro *n* de la décimale qu'on veut connaître, au plus comme un polynôme en *n*, et la mémoire nécessaire au calcul augmente au plus comme un polynôme en log*(n)* (c'est-à-dire lentement, car $\log_{10}(10) = 1$, $\log_{10}(100) = 2$, $\log_{10}(1000) = 3$, etc.).

La nouvelle formule pour π ne permet pas de calculer le *n*-ième chiffre plus rapidement que les méthodes connues avant elle (et qui nécessitaient toutes le calcul des chiffres précédents) ; en revanche, elle permet de calculer ce *n*-ième chiffre sans avoir à utiliser et gérer une trop importante quantité de mémoire (ce qui est l'obstacle factuel pour ces calculs) : la nouvelle formule montre que π appartient à la classe de Steven SC_2, ce que tout le monde ignorait avant (et jugeait même improbable).

La découverte de S. Plouffe, en 1996, devrait permettre d'étendre le résultat théorique à la base 10 et à toute base. Pour la base 2, il y a une conséquence pratique remarquable : pour calculer des millions de chiffres de π, il n'est plus nécessaire de programmer des calculs en arithmétique exacte, c'est-à-dire de développer de longs programmes spécialisés dans la manipulation des entiers de très grande taille. En utilisant les méthodes décrites plus haut, on peut se contenter de l'arithmétique de base de l'ordinateur (arithmétique d'une ou deux dizaines de chiffres bien souvent) et donc, avec un programme court de quelques dizaines de lignes, on calcule les chiffres binaires de π très très loin. Ce qui, en définitive, autorise l'accès à des chiffres binaires de π que personne, avant,ne connaissait.

Bien sûr, d'autres limites (celles dues au temps de calcul) bornent encore l'endroit qu'on peut atteindre dans π : π est infiniment long, et nous n'en connaîtrons jamais qu'une infime partie!

L'exploitation de la nouvelle formule de π n'est pas terminée. Programmée plus soigneusement encore qu'elle ne l'a été depuis les quelques mois qu'elle est connue, ou en utilisant des ordinateurs parallèles, il est certain qu'elle va donner des chiffres bien au-delà du 400 milliardième. D'après S. Plouffe, on devrait rejoindre la 10^{15e} position binaire de π dans un proche avenir, ce qui, il n'y a pas longtemps, était considéré comme définitivement impossible ou réservé à nos arrière petits-enfants! Le fractionnement du travail de calcul sur une multitude de petites machines, qu'autorise la nouvelle formule, rend facile l'établissement de nouveaux records, et cela même si l'on exige de ne prendre en

LA DÉSESPÉRANTE BANALITÉ DE π

En 1995 le Japonais Kanada a calculé 6 442 450 000 décimales de π.
En prenant en compte les 6 milliards premières, on a trouvé les apparitions suivantes des différents chiffres :

0 : 599 963 005	1 : 600 033 260
2 : 599 999 169	3 : 600 000 243
4 : 599 957 439	5 : 600 017 176
6 : 600 016 588	7 : 600 009 044
8 : 599 987 038	9 : 600 017 038

La vitesse avec laquelle les fréquences approchent de 1/10 est conforme à ce qu'on obtiendrait avec un tirage au hasard. L'écart doit diminuer comme $1/\sqrt{n}$, ce qui semble être le cas puisque la fréquence du '7' par exemple est :

0	pour les 10 premières décimales
0,08	pour les 100 premières décimales
0,095	pour les 1000 premières décimales
0,097	pour les 10000 premières décimales
0,10025	pour les 100000 premières décimales
0,0998	pour les 1000000 premières décimales
0,1000207	pour les 10000000 premières décimales

Avec les 10 millions premières décimales de π, on peut engendrer deux millions de séries de 5 chiffres qu'on peut assimiler à des mains de Poker. On calcule quel est le nombre statistiquement attendu de certaines configurations de Poker pour des mains tirées au hasard (si on jouait avec un jeu ayant 10 sortes de cartes différentes au lieu de 13). On s'aperçoit alors que ce qu'on trouve pour les mains de poker tirées des décimales de π ressemblent à celles qu'on aurait par de véritables tirages aléatoires.

	Nombre attendu	Nombre trouvé
les 5 décimales distinctes	604 800	604 976
2 décimales identiques (une paire)	1 008 000	1 007 151
deux paires	216 000	216 520
3 décimales identiques (brelan)	144 000	144 375
un full (paire + brelan)	18 000	17 891
un carré	9 000	8 887
5 décimales identiques	200	200

D'autres études ont été faites et personne jusqu'à présent n'a jamais trouvé de propriété statistique remarquable des décimales de π, qui apparaissent donc désespérément banales.
Le nombre π semble aléatoire. Mais ce serait aller trop vite en besogne que de conclure cela car :
- d'une part, rien n'est démontré : on ne sait même pas si tous les chiffres sont utiles (personne n'a prouvé que p ne se termine pas par 2020020002...) ;
- d'autre part, satisfaire certaines propriétés statistiques n'est pas suffisant pour être considéré comme aléatoire. Le nombre de Champernowne, 0,12345678910111213141 5..., n'est pas du tout aléatoire et pourtant il est normal en base 10 et donc il satisfait aussi les tests de fréquence envisagés plus haut.

La nouvelle formule de Bailey Borwein et Plouffe pour la première fois depuis des siècles offre une perspective de progrès dans la connaissance des propriétés générales des chiffres binaires de π.