

10^9 : 85895585A0428B

10^{10} : 921C73C6838FB2

Les auteurs ont programmé ces calculs sur les ordinateurs de la NASA, où D. Bailey travaille. Comme s'ils craignaient qu'on ne les accuse de dilapider l'argent du contribuable américain dans des calculs absurdes, ils précisent qu'ils n'ont utilisé les machines que pendant qu'elles étaient inoccupées.

LES CLASSES DE COMPLEXITÉ ET π

D'un point de vue théorique, qu'est-ce qu'apportent la nouvelle formule pour π et les formules du même genre trouvées depuis? Plusieurs choses importantes.

La classe de Steven SC₂ est celle des nombres dont on peut calculer les chiffres binaires en «temps polynomial» et en «espace log-polynomial». Lorsqu'un nombre est dans SC₂, pour en connaître le n -ième chiffre binaire, on doit calculer pendant (par exemple) n^2 secondes et utiliser $\log n$ mémoires : le temps de calcul augmente, en fonction du numéro n de la décimale qu'on veut connaître, au plus comme un polynôme en n , et la mémoire nécessaire au calcul augmente au plus comme un polynôme en $\log(n)$ (c'est-à-dire lentement, car $\log_{10}(10) = 1$, $\log_{10}(100) = 2$, $\log_{10}(1000) = 3$, etc.).

La nouvelle formule pour π ne permet pas de calculer le n -ième chiffre plus rapidement que les méthodes connues avant elle (et qui nécessitaient toutes le calcul des chiffres précédents) ; en revanche, elle permet de calculer ce n -ième chiffre sans avoir à utiliser et gérer une trop importante quantité de mémoire (ce qui est l'obstacle factuel pour ces calculs) : la nouvelle formule montre que π appartient à la classe de Steven SC₂, ce que tout le monde ignorait avant (et jugeait même improbable).

La découverte de S. Plouffe, en 1996, devrait permettre d'étendre le résultat théorique à la base 10 et à toute base. Pour la base 2, il y a une conséquence pratique remarquable : pour calculer des millions de chiffres de π , il n'est plus nécessaire de programmer des calculs en arithmétique exacte, c'est-à-dire de développer de longs programmes spécialisés dans la manipulation des entiers de très grande taille. En utilisant les méthodes décrites plus haut, on peut se contenter de l'arithmétique de base de l'ordinateur (arithmétique d'une ou deux dizaines de chiffres bien souvent) et donc, avec un programme court de quelques dizaines de lignes, on calcule les chiffres binaires de π très très loin. Ce qui, en définitive, autorise l'accès à des chiffres binaires de π que personne, avant, ne connaissait.

Bien sûr, d'autres limites (celles dues au temps de calcul) bornent encore l'endroit qu'on peut atteindre dans π : π est infiniment long, et nous n'en connaissons jamais qu'une infime partie!

L'exploitation de la nouvelle formule de π n'est pas terminée. Programmée plus soigneusement encore qu'elle ne l'a été depuis les quelques mois qu'elle est connue, ou en utilisant des ordinateurs parallèles, il est certain qu'elle va donner des chiffres bien au-delà du

400 milliardième. D'après S. Plouffe, on devrait rejoindre la 10^{15e} position binaire de π dans un proche avenir, ce qui, il n'y a pas longtemps, était considéré comme définitivement impossible ou réservé à nos arrières-petits-enfants! Le fractionnement du travail de calcul sur une multitude de petites machines, qu'autorise la nouvelle formule, rend facile l'établissement de nouveaux records, et cela même si l'on exige de ne prendre en

LA DÉSESPÉRANTE BANALITÉ DE π

En 1995 le Japonais Kanada a calculé 6 442 450 000 décimales de π . En prenant en compte les 6 milliards premières, on a trouvé les apparitions suivantes des différents chiffres :

0 : 599 963 005	1 : 600 033 260
2 : 599 999 169	3 : 600 000 243
4 : 599 957 439	5 : 600 017 176
6 : 600 016 588	7 : 600 009 044
8 : 599 987 038	9 : 600 017 038

La vitesse avec laquelle les fréquences approchent de 1/10 est conforme à ce qu'on obtiendrait avec un tirage au hasard. L'écart doit diminuer comme $1/\sqrt{n}$, ce qui semble être le cas puisque la fréquence du '7' par exemple est :

0	pour les 10 premières décimales
0,08	pour les 100 premières décimales
0,095	pour les 1000 premières décimales
0,097	pour les 10000 premières décimales
0,10025	pour les 100000 premières décimales
0,0998	pour les 1000000 premières décimales
0,1000207	pour les 10000000 premières décimales

Avec les 10 millions premières décimales de π , on peut engendrer deux millions de séries de 5 chiffres qu'on peut assimiler à des mains de Poker. On calcule quel est le nombre statistiquement attendu de certaines configurations de Poker pour des mains tirées au hasard (si on jouait avec un jeu ayant 10 sortes de cartes différentes au lieu de 13). On s'aperçoit alors que ce qu'on trouve pour les mains de poker tirées des décimales de π ressemblent à celles qu'on aurait par de véritables tirages aléatoires.

	Nombre attendu	Nombre trouvé
les 5 décimales distinctes	604 800	604 976
2 décimales identiques (une paire)	1 008 000	1 007 151
deux paires	216 000	216 520
3 décimales identiques (brelan)	144 000	144 375
un full (paire + brelan)	18 000	17 891
un carré	9 000	8 887
5 décimales identiques	200	200

D'autres études ont été faites et personne jusqu'à présent n'a jamais trouvé de propriété statistique remarquable des décimales de π , qui apparaissent donc désespérément banales.

Le nombre π semble aléatoire. Mais ce serait aller trop vite en besogne que de conclure cela car :

- d'une part, rien n'est démontré : on ne sait même pas si tous les chiffres sont utiles (personne n'a prouvé que p ne se termine pas par 2020020002...);
- d'autre part, satisfaire certaines propriétés statistiques n'est pas suffisant pour être considéré comme aléatoire. Le nombre de Champernowne, 0,123456789101112131415..., n'est pas du tout aléatoire et pourtant il est normal en base 10 et donc il satisfait aussi les tests de fréquence envisagés plus haut.

La nouvelle formule de Bailey Borwein et Plouffe pour la première fois depuis des siècles offre une perspective de progrès dans la connaissance des propriétés générales des chiffres binaires de π .