10^9 : 85895585A0428B
10^{10} : 921C73C6838FB2

Les auteurs ont programmé ces calculs sur les ordinateurs de la NASA, où D. Bailey travaille. Comme s'ils craignaient qu'on ne les accuse de dilapider l'argent du contribuable américain dans des calculs absurdes, ils précisent qu'ils n'ont utilisé les machines que pendant qu'elles étaient inoccupées.

LES CLASSES DE COMPLEXITÉ ET π

D'un point de vue théorique, qu'est-ce qu'apportent la nouvelle formule pour π et les formules du même genre trouvées depuis? Plusieurs choses importantes.

La classe de Steven SC_2 est celle des nombres dont on peut calculer les chiffres binaires en «temps polynomial» et en «espace log-polynomial». Lorsqu'un nombre est dans SC_2, pour en connaître le *n*-ième chiffre binaire, on doit calculer pendant (par exemple) n^2 secondes et utiliser log *n* mémoires : le temps de calcul augmente, en fonction du numéro *n* de la décimale qu'on veut connaître, au plus comme un polynôme en *n*, et la mémoire nécessaire au calcul augmente au plus comme un polynôme en log*(n)* (c'est-à-dire lentement, car $\log_{10}(10) = 1$, $\log_{10}(100) = 2$, $\log_{10}(1000) = 3$, etc.).

La nouvelle formule pour π ne permet pas de calculer le *n*-ième chiffre plus rapidement que les méthodes connues avant elle (et qui nécessitaient toutes le calcul des chiffres précédents) ; en revanche, elle permet de calculer ce *n*-ième chiffre sans avoir à utiliser et gérer une trop importante quantité de mémoire (ce qui est l'obstacle factuel pour ces calculs) : la nouvelle formule montre que π appartient à la classe de Steven SC_2, ce que tout le monde ignorait avant (et jugeait même improbable).

La découverte de S. Plouffe, en 1996, devrait permettre d'étendre le résultat théorique à la base 10 et à toute base. Pour la base 2, il y a une conséquence pratique remarquable : pour calculer des millions de chiffres de π, il n'est plus nécessaire de programmer des calculs en arithmétique exacte, c'est-à-dire de développer de longs programmes spécialisés dans la manipulation des entiers de très grande taille. En utilisant les méthodes décrites plus haut, on peut se contenter de l'arithmétique de base de l'ordinateur (arithmétique d'une ou deux dizaines de chiffres bien souvent) et donc, avec un programme court de quelques dizaines de lignes, on calcule les chiffres binaires de π très très loin. Ce qui, en définitive, autorise l'accès à des chiffres binaires de π que personne, avant,ne connaissait.

Bien sûr, d'autres limites (celles dues au temps de calcul) bornent encore l'endroit qu'on peut atteindre dans π : π est infiniment long, et nous n'en connaîtrons jamais qu'une infime partie!

L'exploitation de la nouvelle formule de π n'est pas terminée. Programmée plus soigneusement encore qu'elle ne l'a été depuis les quelques mois qu'elle est connue, ou en utilisant des ordinateurs parallèles, il est certain qu'elle va donner des chiffres bien au-delà du 400 milliardième. D'après S. Plouffe, on devrait rejoindre la 10^{15e} position binaire de π dans un proche avenir, ce qui, il n'y a pas longtemps, était considéré comme définitivement impossible ou réservé à nos arrière petits-enfants! Le fractionnement du travail de calcul sur une multitude de petites machines, qu'autorise la nouvelle formule, rend facile l'établissement de nouveaux records, et cela même si l'on exige de ne prendre en

LA DÉSESPÉRANTE BANALITÉ DE π

En 1995 le Japonais Kanada a calculé 6 442 450 000 décimales de π.
En prenant en compte les 6 milliards premières, on a trouvé les apparitions suivantes des différents chiffres :

0 : 599 963 005	1 : 600 033 260
2 : 599 999 169	3 : 600 000 243
4 : 599 957 439	5 : 600 017 176
6 : 600 016 588	7 : 600 009 044
8 : 599 987 038	9 : 600 017 038

La vitesse avec laquelle les fréquences approchent de 1/10 est conforme à ce qu'on obtiendrait avec un tirage au hasard. L'écart doit diminuer comme $1/\sqrt{n}$, ce qui semble être le cas puisque la fréquence du '7' par exemple est :

0	pour les 10 premières décimales
0,08	pour les 100 premières décimales
0,095	pour les 1000 premières décimales
0,097	pour les 10000 premières décimales
0,10025	pour les 100000 premières décimales
0,0998	pour les 1000000 premières décimales
0,1000207	pour les 10000000 premières décimales

Avec les 10 millions premières décimales de π, on peut engendrer deux millions de séries de 5 chiffres qu'on peut assimiler à des mains de Poker. On calcule quel est le nombre statistiquement attendu de certaines configurations de Poker pour des mains tirées au hasard (si on jouait avec un jeu ayant 10 sortes de cartes différentes au lieu de 13). On s'aperçoit alors que ce qu'on trouve pour les mains de poker tirées des décimales de π ressemblent à celles qu'on aurait par de véritables tirages aléatoires.

	Nombre attendu	Nombre trouvé
les 5 décimales distinctes	604 800	604 976
2 décimales identiques (une paire)	1 008 000	1 007 151
deux paires	216 000	216 520
3 décimales identiques (brelan)	144 000	144 375
un full (paire + brelan)	18 000	17 891
un carré	9 000	8 887
5 décimales identiques	200	200

D'autres études ont été faites et personne jusqu'à présent n'a jamais trouvé de propriété statistique remarquable des décimales de π, qui apparaissent donc désespérément banales.
Le nombre π semble aléatoire. Mais ce serait aller trop vite en besogne que de conclure cela car :
- d'une part, rien n'est démontré : on ne sait même pas si tous les chiffres sont utiles (personne n'a prouvé que p ne se termine pas par 2020020002...) ;
- d'autre part, satisfaire certaines propriétés statistiques n'est pas suffisant pour être considéré comme aléatoire. Le nombre de Champernowne, 0,12345678910111213141 5..., n'est pas du tout aléatoire et pourtant il est normal en base 10 et donc il satisfait aussi les tests de fréquence envisagés plus haut.

La nouvelle formule de Bailey Borwein et Plouffe pour la première fois depuis des siècles offre une perspective de progrès dans la connaissance des propriétés générales des chiffres binaires de π.

compte que les chiffres dont on connaît tous les chiffres précédents.

Plus important encore, la formule BBP ouvre la porte à une étude mathématique générale des chiffres de π qui est restée décevante jusqu'à présent. La seule chose démontrée concernant les chiffres de π est que jamais ils ne se répètent périodiquement : sinon, π serait rationnel (rapport de deux entiers), ce qui n'est pas le cas, comme on le sait depuis 1766 grâce à une démonstration du mathématicien Lambert. Rien d'autre n'est connu sur les propriétés des chiffres de π (le fait qu'il soit transcendant, comme l'a montré Lindemann en 1882, ne fournit aucune propriété intéressante de ses chiffres).

Parce qu'elle donne un accès plus immédiat aux chiffres de π que toutes les formules connues jusqu'à présent, la nouvelle formule permettra peut-être de prouver que les chiffres de π sont équitablement répartis (un tel nombre est appelé normal), ce qui a été constaté, mais jamais démontré. Ce serait une avancée remarquable. À défaut, peut-être pourra-t-on trouver des motifs réguliers dans ces chiffres ou une certaine structure, éventuellement complexe, mais différente de celle d'une suite aléatoire. Ce serait formidable, car tous les tests statistiques faits jusqu'à présent sur les chiffres binaires ou décimaux de π n'ont amené que la conclusion qu'ils étaient d'une désespérante banalité.

S. Plouffe juge possible une telle avancée : «Je crois que la preuve que log(2) ou π sont normaux en base 2 n'est pas loin et je n'écarte pas même une formule directe qui donnerait la *n*-ième position de log(2) en binaire en temps linéaire.» D'autres mathématiciens, tels D. Bailey et J. Shallit, croient aussi à une avancée proche sur ces questions bloquées depuis deux siècles.

Des formules analogues à celle trouvée par S. Plouffe ont été découvertes, qui montrent, par exemple, que π^2, $\pi\sqrt{2}$, log(2) sont dans la classe de Steven SC_2. Pour les logarithmes, quelque chose d'étonnant se produit : on a trouvé des formules pour log(2), log(3), ..., log(22), mais pas pour log(23). Il se peut que, pour une majorité d'entiers, log*(n)* soit dans SC_2. Peut-être même le sont-ils tous, mais cela reste à prouver.

La passion que S. Plouffe éprouve pour π n'est pas nouvelle. En 1975, il avait mémorisé 4 096 décimales de π (le record actuel est de plus de 42 000). Il figurait à ce titre dans le *Livre des records*. Il est amusant de voir que, 20 ans après, il participe à une découverte de premier ordre concernant π.

Pour mémoriser les décimales de π, il raconte qu'il les prenait par groupes de 100, les écrivait plusieurs fois et réussissait ainsi à les connaître grâce à sa mémoire photographique des chiffres. Pour ne pas oublier les décimales apprises, il s'isolait régulièrement dans le noir pour les réciter. Après son record de 4 096, il réussit à atteindre 4 400, et décida alors de s'arrêter. Cette connivence avec les chiffres rappelle celle d'Euler et de Ramanujan.

Les mathématiques expérimentales

L'équipe de l'Université Simon Fraser qui a découvert la nouvelle formule pour π participe et anime un groupe de mathématiciens qui préconisent une nouvelle pratique des mathématiques. Pour eux, les mathématiques à la fin du XIX^e siècle sont devenues abstraites parce que tout (ou presque) ce qui pouvait être trouvé «à la main» l'avait été. Ils soutiennent qu'avec les ordinateurs une nouvelle ère de mathématiques concrètes et expérimentales doit se développer.

L'interaction entre un logiciel de calcul numérique ou formel et un mathématicien permet d'explorer des domaines où la longueur et la complexité des manipulations symboliques ne sont plus des obstacles. L'ordinateur assiste le mathématicien en effectuant des tâches fastidieuses comme la dérivation, le calcul de primitives, la factorisation des polynômes, etc. La recherche de mises en correspondance numériques peut être menée à grande échelle, et la démonstration automatisée de formules intermédiaires complexes est confiée à des programmes.

Même si la formule de D. Bailey, P. Borwein et S. Plouffe avait pu être découverte sans ordinateur, elle l'a été avec! C'est à la suite d'une exploration consciente menée par Simon Plouffe que la formule est apparue, exploration où l'intelligence du mathématicien et le pouvoir de manipulation symbolique extraordinaire des programmes informatiques ont travaillé en symbiose. Une fois la formule trouvée, il fallait la démontrer. Cela aurait pu être fait à la main, mais l'aide d'un programme rendit la tâche plus facile (précisons toutefois que la démonstration trouvée a été vérifiée sans ordinateur).

Aujourd'hui, ces mathématiciens qui préconisent l'utilisation de l'ordinateur pour trouver de nouvelles «vérités» mathématiques poursuivent des travaux qui avaient été plus ou moins abandonnés à cause de la complexité de calculs qu'il n'était pas envisageable de poursuivre à la main. Le grand mathématicien indien Ramanujan, qui avait un don mathématique exceptionnel pour trouver des formules (dont certaines concernent π), avait réussi à aller un peu plus loin que ses prédécesseurs ; aujourd'hui, grâce aux ordinateurs et aux mathématiciens expérimentateurs, son travail se poursuit.

Ordinateurs et vérités mathématiques

Ces recherches posent de nouveaux problèmes à la philosophie des mathématiques, car, par exemple, il arrive qu'une formule soit découverte par interaction avec l'ordinateur sans qu'on réussisse à en donner la preuve. Dans un tel cas, les mathématiciens expérimentateurs ne considèrent pas que la formule est vraie : ils acceptent la distinction classique entre *vérité prouvée* et *vérité constatée* (distinction qui n'existe sans doute pas en physique). Leur conception expérimentale des mathématiques ne préconise donc pas d'identifier mathématiques et physique.

L'ordinateur est une aide, mais c'est au mathématicien humain, aujourd'hui encore, de dire si une affirmation mathématique a été prouvée ou non, et cela *(1)* même lorsque c'est un ordinateur qui a permis de formuler cette affirmation ; *(2)* même s'il est intervenu de manière essentielle dans l'élaboration de la preuve ; *(3)* même si, pour des raisons de complexité, on ne peut se passer de calculs ou de raisonnements faits par ordinateur pour mener à terme la démonstration. Aucun des mathématiciens du domaine ne démontrera seul, à la main, le théorème tout nouveau que «le 400 milliardième chiffre binaire de π est un 1», mais c'est eux qui décident de la vérité d'une telle affirmation.

Jean-Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.
e-mail delahaye@lifl.fr

V. ADAMCHIK et S. WAGON, *Pi : a 2000-Year Search Change Direction,* Manuscrit, 1995.

D.H. BAILEY, P.B. BORWEIN et S. PLOUFFE, *On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants,* Manuscrit, 1996.

D.H. BAILEY, J.M. BORWEIN, P.B. BORWEIN et S. PLOUFFE, *The Quest for Pi*, Manuscrit, 1996.

S. PLOUFFE, *Sur la n-ième décimale des nombres transcendants ou la 10 milliardième décimale (hex) de π est 9*, Manuscrit de notes pour une conférence, 1996.

I. STEWART, *Les algorithmes compte-gouttes*, in *Pour La Science*, n° 215, septembre 1995.