

compte que les chiffres dont on connaît tous les chiffres précédents.

Plus important encore, la formule BBP ouvre la porte à une étude mathématique générale des chiffres de π qui est restée décevante jusqu'à présent. La seule chose démontrée concernant les chiffres de π est que jamais ils ne se répètent périodiquement : sinon, π serait rationnel (rapport de deux entiers), ce qui n'est pas le cas, comme on le sait depuis 1766 grâce à une démonstration du mathématicien Lambert. Rien d'autre n'est connu sur les propriétés des chiffres de π (le fait qu'il soit transcendant, comme l'a montré Lindemann en 1882, ne fournit aucune propriété intéressante de ses chiffres).

Parce qu'elle donne un accès plus immédiat aux chiffres de π que toutes les formules connues jusqu'à présent, la nouvelle formule permettra peut-être de prouver que les chiffres de π sont équitablement répartis (un tel nombre est appelé normal), ce qui a été constaté, mais jamais démontré. Ce serait une avancée remarquable. À défaut, peut-être pourra-t-on trouver des motifs réguliers dans ces chiffres ou une certaine structure, éventuellement complexe, mais différente de celle d'une suite aléatoire. Ce serait formidable, car tous les tests statistiques faits jusqu'à présent sur les chiffres binaires ou décimaux de π n'ont amené que la conclusion qu'ils étaient d'une désespérante banalité.

S. Plouffe juge possible une telle avancée : «Je crois que la preuve que $\log(2)$ ou π sont normaux en base 2 n'est pas loin et je n'écarte pas même une formule directe qui donnerait la n -ième position de $\log(2)$ en binaire en temps linéaire.» D'autres mathématiciens, tels D. Bailey et J. Shallit, croient aussi à une avancée proche sur ces questions bloquées depuis deux siècles.

Des formules analogues à celle trouvée par S. Plouffe ont été découvertes, qui montrent, par exemple, que π^2 , $\pi\sqrt{2}$, $\log(2)$ sont dans la classe de Steven SC_2 . Pour les logarithmes, quelque chose d'étonnant se produit : on a trouvé des formules pour $\log(2)$, $\log(3)$, ..., $\log(22)$, mais pas pour $\log(23)$. Il se peut que, pour une majorité d'entiers, $\log(n)$ soit dans SC_2 . Peut-être même le sont-ils tous, mais cela reste à prouver.

La passion que S. Plouffe éprouve pour π n'est pas nouvelle. En 1975, il avait mémorisé 4 096 décimales de π (le record actuel est de plus de 42 000). Il figurait à ce titre dans le *Livre des records*. Il est amusant de voir que, 20 ans après, il participe à une découverte de premier ordre concernant π .

Pour mémoriser les décimales de π , il raconte qu'il les prenait par groupes

de 100, les écrivait plusieurs fois et réussissait ainsi à les connaître grâce à sa mémoire photographique des chiffres. Pour ne pas oublier les décimales apprises, il s'isolait régulièrement dans le noir pour les réciter. Après son record de 4 096, il réussit à atteindre 4 400, et décida alors de s'arrêter. Cette connivence avec les chiffres rappelle celle d'Euler et de Ramanujan.

LES MATHÉMATIQUES EXPÉRIMENTALES

L'équipe de l'Université Simon Fraser qui a découvert la nouvelle formule pour π participe et anime un groupe de mathématiciens qui préconisent une nouvelle pratique des mathématiques. Pour eux, les mathématiques à la fin du XIX^e siècle sont devenues abstraites parce que tout (ou presque) ce qui pouvait être trouvé «à la main» l'avait été. Ils soutiennent qu'avec les ordinateurs une nouvelle ère de mathématiques concrètes et expérimentales doit se développer.

L'interaction entre un logiciel de calcul numérique ou formel et un mathématicien permet d'explorer des domaines où la longueur et la complexité des manipulations symboliques ne sont plus des obstacles. L'ordinateur assiste le mathématicien en effectuant des tâches fastidieuses comme la dérivation, le calcul de primitives, la factorisation des polynômes, etc. La recherche de mises en correspondance numériques peut être menée à grande échelle, et la démonstration automatisée de formules intermédiaires complexes est confiée à des programmes.

Même si la formule de D. Bailey, P. Borwein et S. Plouffe avait pu être découverte sans ordinateur, elle l'a été avec ! C'est à la suite d'une exploration consciente menée par Simon Plouffe que la formule est apparue, exploration où l'intelligence du mathématicien et le pouvoir de manipulation symbolique extraordinaire des programmes informatiques ont travaillé en symbiose. Une fois la formule trouvée, il fallait la démontrer. Cela aurait pu être fait à la main, mais l'aide d'un programme rendit la tâche plus facile (précisons toutefois que la démonstration trouvée a été vérifiée sans ordinateur).

Aujourd'hui, ces mathématiciens qui préconisent l'utilisation de l'ordinateur pour trouver de nouvelles «vérités» mathématiques poursuivent des travaux qui avaient été plus ou moins abandonnés à cause de la complexité de calculs qu'il n'était pas envisageable de poursuivre à la main. Le grand mathématicien indien Ramanujan, qui avait un don mathématique exceptionnel pour trouver des formules (dont certaines

concernent π), avait réussi à aller un peu plus loin que ses prédécesseurs ; aujourd'hui, grâce aux ordinateurs et aux mathématiciens expérimentateurs, son travail se poursuit.

ORDINATEURS ET VÉRITÉS MATHÉMATIQUES

Ces recherches posent de nouveaux problèmes à la philosophie des mathématiques, car, par exemple, il arrive qu'une formule soit découverte par interaction avec l'ordinateur sans qu'on réussisse à en donner la preuve. Dans un tel cas, les mathématiciens expérimentateurs ne considèrent pas que la formule est vraie : ils acceptent la distinction classique entre *vérité prouvée* et *vérité constatée* (distinction qui n'existe sans doute pas en physique). Leur conception expérimentale des mathématiques ne préconise donc pas d'identifier mathématiques et physique.

L'ordinateur est une aide, mais c'est au mathématicien humain, aujourd'hui encore, de dire si une affirmation mathématique a été prouvée ou non, et cela (1) même lorsque c'est un ordinateur qui a permis de formuler cette affirmation ; (2) même s'il est intervenu de manière essentielle dans l'élaboration de la preuve ; (3) même si, pour des raisons de complexité, on ne peut se passer de calculs ou de raisonnements faits par ordinateur pour mener à terme la démonstration. Aucun des mathématiciens du domaine ne démontrera seul, à la main, le théorème tout nouveau que «le 400 milliardième chiffre binaire de π est un 1», mais c'est eux qui décident de la vérité d'une telle affirmation.

Jean-Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.
e-mail delahaye@lil.fr

V. ADAMCHIK et S. WAGON, *Pi : a 2000-Year Search Change Direction*, Manuscrit, 1995.

D.H. BAILEY, P.B. BORWEIN et S. PLOUFFE, *On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants*, Manuscrit, 1996.

D.H. BAILEY, J.M. BORWEIN, P.B. BORWEIN et S. PLOUFFE, *The Quest for Pi*, Manuscrit, 1996.

S. PLOUFFE, *Sur la n-ième décimale des nombres transcendants ou la 10 milliardième décimale (hex) de π est 9*, Manuscrit de notes pour une conférence, 1996.

I. STEWART, *Les algorithmes compte-gouttes*, in *Pour La Science*, n° 215, septembre 1995.