

Les mathématiques introduites en Bourse

CHRISTIAN WALTER

En 1900, Louis Bachelier, génie méconnu, utilise les théories des probabilités et de la diffusion de la chaleur pour étudier l'évolution de la rente.

Quand la science a-t-elle été utilisée en finance ? S'il s'agit de la théorie financière moderne appliquée aux marchés de capitaux, c'est-à-dire de l'approche probabiliste du comportement des marchés, la réponse est claire : le 29 mars 1900.

À cette date, Louis Bachelier soutient sa thèse pour l'obtention du doctorat en mathématiques, thèse qui porte sur la «Théorie de la spéculation», et qui étudie comment formaliser, au moyen de méthodes probabilistes, les variations de la Bourse de Paris.

C'est la première fois, depuis que les bourses existent, que l'on considère les fluctuations des marchés comme les résultats de tirages aléatoires. La totalité des développements probabilistes ultérieurs qui, à partir des années 1970, constitueront le cœur théorique de la finance de marché, sont issus des prémices de la thèse de Bachelier.

L'originalité du sujet de la thèse de Bachelier frappe de stupeur le jury, où siège Henri Poincaré. Poincaré laisse filtrer son étonnement : «Le sujet s'éloigne un peu de ceux qui sont habituellement traités par nos candidats». Commentaire qui jette un doute sur le sérieux de l'entreprise : la bourse ne se prête pas à des développements mathématiques, pensent les universitaires, les mathématiques ne doivent pas se compromettre avec l'argent. Réapparaissent ainsi les critiques de Platon, rappelées par Plutarque, sur la dégradation des mathématiques lorsqu'elles deviennent appliquées, «les faisant descendre des choses intellectuelles et incorporelles aux choses sensibles et matérielles (...) où il faut trop vilement et trop basement employer l'œuvre de la main». Les mathématiques pour l'argent ? Pour la bourse ? Incongruité en 1900.

Le développement des marchés dérivés a pourtant donné raison aux utilitaristes modernes : l'usage des mathématiques en bourse a été validé par la

fécondité technique des applications innombrables que l'outil élaboré par Bachelier a permis de réaliser. Si, aujourd'hui, il est possible d'acheter des produits financiers qui permettent de bénéficier des hausses de marché, sans subir les conséquences des baisses, c'est parce qu'en 1900, quelqu'un a eu cette idée invraisemblable à l'époque, que l'on pouvait utiliser la théorie des probabilités pour modéliser les fluctuations boursières.

Que dit Bachelier ? Dans sa thèse de doctorat, il écrit : «Les influences qui déterminent les mouvements de la Bourse sont innombrables, des événements passés, actuels ou même escomptables, ne présentant souvent aucun rapport apparent avec ses variations, se répercutent sur son cours». Il ajoute : «La détermination de ces mouvements se subordonne à un nombre infini de facteurs : il est dès lors impossible d'en espérer la prévision mathématique».

Examinant ce «nombre infini de facteurs», Bachelier retrouve dans l'étude du marché boursier des considérations

que Gauss avaient déjà rencontrées : la somme de petits aléas indépendants. Les variations induites par cette somme d'aléas suivent la célèbre loi normale, dite «de Laplace-Gauss». Bachelier décrit alors la variabilité du marché au moyen de la dispersion gaussienne et calibre les variations boursières par la variance.

D'un point de vue dynamique, Bachelier invente le concept de rayonnement de la probabilité : «chaque cours rayonne pendant l'élément de temps vers le cours voisin une quantité de probabilité proportionnelle à la différence de leur probabilité (...) la loi qui précède peut, par analogie avec certaines théories physiques, être appelée la loi du rayonnement ou de diffusion de la probabilité». Diffusion : le mot est dit. Cinq ans avant Einstein, Bachelier invente le premier processus de diffusion connu : le mouvement brownien. Ainsi le premier mouvement brownien apparaît en finance avant d'être utilisé, avec le succès que l'on connaît, en physique.

Poincaré apprécie cette vision : «La manière dont Louis Bachelier tire la loi de Gauss est fort originale et d'autant plus intéressante que le raisonnement pourrait s'étendre avec quelques changements à la théorie des erreurs. Il le développe dans un chapitre dont le titre peut sembler étranger, car il l'intitule «Rayonnement de la probabilité». C'est en effet à une comparaison avec la théorie analytique de la propagation de la chaleur que l'auteur a eu recours. Un peu de réflexion (*sic*) montre que l'analogie est réelle et la comparaison légitime. Les raisonnements de Fourier sont applicables presque sans changement à ce problème si différent de celui pour lequel ils ont été créés. On peut regretter que l'auteur n'ait pas développé davantage cette partie de sa thèse». Partie que les universitaires américains développeront trois quarts de siècle plus tard. En examinant le comportement de la rente à la bourse de Paris, Bachelier a retrouvé la loi de Gauss et l'équation de la propagation de la chaleur.

L'utilisation intensive de processus de diffusion en finance de marché illustre l'importance qu'ont prise les mathématiques en Bourse.

Le choix de son sujet a porté préjudice à Bachelier : sa carrière universitaire s'en est ressentie. Après avoir eu beaucoup de difficultés à obtenir un poste de professeur de mathématiques, il a terminé sa carrière à l'Université de Besançon. Il meurt le 28 avril 1946. Six ans après, un universitaire américain, Harry Markowitz, soutient sa thèse sur la théorie du portefeuille, pour laquelle il obtient le prix Nobel d'économie. Comme dans certaines introductions en bourse, autres sont ceux qui sèment, autres sont ceux qui moissonnent.

THÉORIE DE LA SPÉCULATION,

Par M.L. BACHELIER

INTRODUCTION

Les influences qui déterminent les mouvements de la Bourse sont innombrables, des événements passés, actuels ou même escomptables, ne présentant souvent aucun rapport apparent avec ses variations, se répercutent sur son cours.

À côté des causes en quelque sorte naturelles des variations, interviennent aussi des causes factices : la Bourse agit sur elle-même et le mouvement actuel est fonction, non seulement des mouvements antérieurs, mais aussi de la position de la place.

La détermination de ces mouvements se subordonne à un nombre infini de facteurs : il est dès lors impossible d'en espérer la prévision mathématique. Les opinions contradictoires relatives à ces variations se partagent si bien qu'au même instant les acheteurs croient à la hausse et les vendeurs à la baisse.

Les divas donnent le la

Les sopranos sont plus gênées que les basses par la hausse du diapason.

Le diapason sur lequel les musiciens accordent leur instrument donne la fréquence du *la* de référence, le *la*₃. Sa hauteur a notablement varié au cours des siècles : de 404 hertz sous Louis XIV et Louis XV, le diapason est passé à 423 hertz sous Napoléon I^{er}, pour fluctuer entre 446 et 457 sous le Second Empire. La hauteur du diapason a non seulement varié dans le temps, mais aussi dans l'espace, puisque jusqu'au milieu du XIX^e siècle, 17 diapasons étaient en usage dans les grandes villes d'Europe, ce qui obligeait les artistes lyriques à chanter la même œuvre à des hauteurs différentes selon qu'ils se produisaient à Paris ou à Vienne.

Pour essayer de remédier à cet état de fait, le directeur du Conservatoire de Paris tente, en 1812, d'imposer un diapason dont la hauteur correspond à la moyenne entre les divers *la* relevés dans la capitale, mais il faudra attendre 1858 pour qu'une commission ministérielle soit nommée. La commission Lissajous-Halévy entreprend une enquête internationale qui révèle un écart de plus d'un ton entre les différents diapasons européens : on joue plus bas à Londres (434 hertz) qu'à Bruxelles (445 hertz). La commission fixe le diapason à 435 hertz à la température de 18 °C.

En 1859, un arrêté ministériel ratifie cette décision en France, et un diapason-étalon est déposé au Conservatoire national des arts et métiers. En 1939, une commission internationale réunie à Londres fixe la hauteur du diapason à 440 hertz à 20 °C, mais cette décision, qui reste sans effet en raison de la guerre, ne sera entérinée qu'en 1975.

Ce sont les sopranos qui se plaignent surtout de la montée constante du dia-

pason, et parmi elles Maria Callas, Renata Tebaldi et Montserrat Caballé. En 1987, cette dernière confiait : « Je me souviens que je chantais à Florence, en 1975, *Le Trouvère* sous la direction de Thomas Schippers. L'orchestre finissait à 446 ! Là, je me suis plainte : j'ai été trouver le Maestro et je lui ai dit que je ne voulais pas chanter Leonora à cette hauteur et pousser ma voix dans une tessiture anormale et inhumaine. »

Gêne réelle ou caprice de diva ? Les acousticiens de la musique sourient depuis toujours aux doléances des cantatrices lorsqu'elles prétendent que la montée du diapason sur des intervalles musicaux aussi infimes qu'un comma les fatigue ou compromet leur santé vocale : c'est parce qu'ils abordent la question du point de vue de la perception auditive uniquement, et non de la production des sons (le comma est le plus petit intervalle musical discernable). Nous avons voulu savoir ce qui se passe du point de vue physiologique.

Pour cela, nous avons utilisé un programme de simulation des vibrations des cordes vocales élaboré par Daniel John Hirst, de l'URA 261 CNRS, qui permet de calculer le nombre total de vibrations des cordes vocales pour les différentes hauteurs de diapason, en fonction de la fréquence et de la durée de chaque note d'un morceau. Nous avons constaté que si un écart d'un comma entre le diapason officiel et le diapason d'orchestre

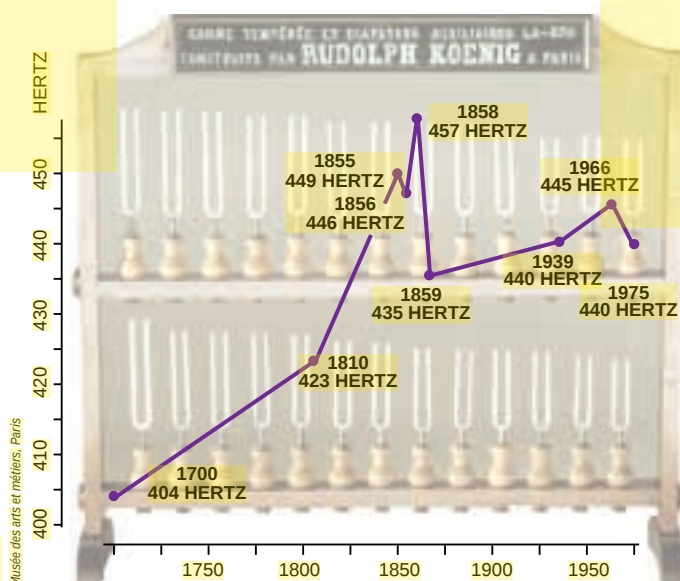
est négligeable sur le plan de la perception, il n'en est pas de même sur le plan de la production.

Pour les voix masculines qui sont situées dans la partie inférieure de l'échelle sonore, la différence entre le nombre de vibrations par seconde des cordes vocales est minime pour les deux diapasons, mais ce n'est pas le cas pour les voix féminines. Ainsi, par exemple, lorsque le diapason est à 445 hertz, les cordes vocales d'une basse vibrent en moyenne 41 fois de plus pour l'ensemble de sa tessiture, c'est-à-dire pour l'ensemble des notes qu'il peut chanter du grave à l'aigu, que lorsque le diapason est à 440 hertz, tandis que les cordes vocales d'une soprano vibrent 160 fois de plus.

Les sopranos légers coloratures qui ont les voix les plus aiguës sont davantage concernées par ce phénomène. Ainsi, aujourd'hui, dans *La Flûte enchantée* de Mozart, la Reine de la Nuit doit émettre des « contre-*fa* » périlleux, puisqu'avec le diapason d'orchestre, ils sont à 1 413 hertz, alors qu'au moment de la création de l'ouvrage, en 1791, le diapason était à 404 hertz, et le contre-*fa* à 1 283 hertz. Par conséquent, entre le contre-*fa* de l'époque de Mozart et celui d'aujourd'hui, il y a une différence de sept huitièmes de ton sur le plan de la perception et de 130 hertz sur le plan de la production. Autrement dit, les cordes vocales des chanteuses actuelles qui émettent les contre-*fa* de la Reine de la Nuit vibrent 130 fois de plus en une seconde. Étant donné que les chanteuses tiennent généralement cette note une dizaine de secondes, cela représente 1 300 vibrations de plus pour la durée totale du contre-*fa*.

L'évaluation théorique de la fatigue vocale des chanteurs en fonction de la montée du diapason réalisée grâce à notre programme devra être complétée par une étude physiologique qui mettra définitivement un terme à la querelle qui oppose les divas et les acousticiens depuis des lustres.

Nicole SCOTTO DI CARLO –
Laboratoire Parole et
Langage – URA 261 – CNRS



Variations de la hauteur du diapason au cours des siècles.