

Les carrés alphamagiques

IAN STEWART

Les beautés des carrés magiques, numériques et linguistiques.

Le carré magique, où les sommes par lignes, par colonnes et suivant chaque diagonale sont toutes égales, est un thème important des jeux mathématiques. Si l'on en croit une légende chinoise, le plus simple des exemples représenté ci-contre (1), fut révélé à l'empereur Yü sur le dos d'une tortue, au XXIII^e siècle avant J.-C. Le total commun, ou «constante magique», de ce carré est 15, et sa taille, ou «ordre», est 3.

(1)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Des carrés magiques existent pour tout ordre supérieur, ainsi qu'une pléthore de généralisations : cubes, hexagones, octogones, cercles magiques...

On pourrait penser que tout ce qui peut être dit sur de tels carrés l'a déjà été depuis longtemps. Mais il y a dix ans, Lee Sallows inventa une «race» entièrement nouvelle : le carré alphamagique. L. Sallows, un expert de jeux de mots, se spécialisa en combinant la linguistique et la mathématique des jeux (une autre de ses inventions, la *New Merology*, a été décrite dans *Pour la Science*, en mai 1994). Ma participation est fondée sur

deux des articles de L. Sallows dans *The Lighter Side of Mathematics*, édité par Richard Guy et Robert Woodrow (*Mathematical Association of America*, 19XX). Le concept est séduisant. En voici un exemple en anglais :

five	twenty-two	eighteen
twenty-eight	fifteen	two
twelve	eight	twenty-five

(2)

5	22	18
28	15	2
12	8	25

(3)

4	9	8
11	7	3
6	5	10

D'une part, les mots, quand ils sont transcrits en chiffres, donnent le carré magique conventionnel (2), de constante 45. Mais, d'autre part, si l'on compte le nombre de lettres de chaque mot (traits d'union exclus), le carré obtenu (3) est aussi magique, cette fois de constante 21.

L. Sallows a développé une théorie générale de telles constructions. Il commence en définissant $\log(x)$, ou «logarithme» de l'entier x , comme le nombre de lettres du mot x (L. Sallows a combiné le grec *logos*, signifiant «mot», et *arithmos*, signifiant «nombre», en un élégant jeu de mots : logorithme). Un nombre a , dans différentes langues, des logorithmes différents. Nous envisagerons plusieurs langues. Commençons par l'anglais.

Pouvons-nous trouver d'autres carrés alphamagiques en anglais ? Oui, et pour une raison simple : il suffit d'ajouter avant chaque chiffre «one million and». La constante magique du carré numérique augmente de trois millions, et celle de son «dérivé logorithmique», le carré obtenu en remplaçant chaque nombre par son logorithme, croît de trois fois le nombre de lettres de «one million and», soit $3 \times 13 = 39$. En conséquence, il existe une infinité de telles extensions des carrés alphamagiques d'ordre trois. L. Sallows dit que ces carrés sont des «harmoniques» du carré initial et, raisonnablement, les écarte comme des variantes triviales.

Existe-t-il d'autres variantes plus intéressantes ? Au XIX^e siècle, le mathématicien français Édouard Lucas imagina une formule (4), pour tout carré magique d'ordre 3 :

$a+b$	$a-b-c$	$a+c$
$a-b+c$	a	$a+b-c$
$a-c$	$a+b+c$	$a-b$

Pour toutes valeurs de a , b et c , le résultat est magique, et tout carré magique d'ordre 3 est de cette forme. Sa constante est $3a$. Remarquez que toute ligne passant par le terme central porte trois termes en progression arithmétique, c'est-à-dire telle que deux termes successifs diffèrent d'une constante. Par suite, une stratégie raisonnée pour trouver des carrés alphamagiques est de rechercher des triplets d'entiers en progression arithmétique, tels que les logorithmes correspondants soient aussi en progression arithmétique.

Choisissons, par exemple, 15 comme nombre central, puisque nous savons qu'un tel carré alphamagique existe. Alors la table des logorithmes révèle cinq triplets adéquats : (2,15,28), (5,15,25), (8,15,22), (11,15,19) et (12,15,18). Nous pouvons alors essayer avec toutes les paires possibles de ces triplets, par exemple sur les deux diagonales. Ainsi, avec les deux premiers, nous avons le carré (5).

(5)

2	25
	15
5	28

La formule de Lucas nous enseigne que la constante magique vaut toujours trois fois le terme central, soit ici 45. Il n'y a donc qu'une seule manière de compléter le carré, comme indiqué en (6).

Nous pouvons soit rejeter ce cas à cause du terme négatif -8, soit l'écrire «minus eight», de logorithme 10. Dans ce dernier cas, le carré logorithmique dérivé est (7), qui, hélas, n'est pas magique. Cependant, les essais avec les autres paires fournissent rapidement un nouveau carré alphamagique. La réponse à cet excellent exercice d'entraînement est donnée plus loin.

(6)

2	18	25
38	15	-8
5	12	28

(7)

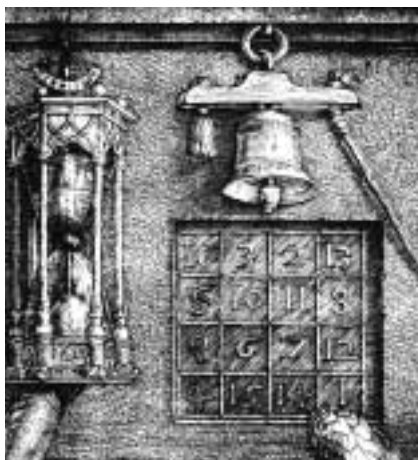
3	8	10
11	7	10
4	6	11

Et si le terme central n'est pas 15 ? L. Sallows écrivit un programme informatique pour chercher d'autres carrés alphamagiques d'ordre 3 et en trouva de nombreux. Un exemple (toujours en anglais) est indiqué en (8).

Le même jeu peut être joué dans d'autres langues. L'encadré de la page 97 indique des exemples en swahili, en gallois, en français

(8)

15	72	48
78	45	12
42	18	75



1. Ce carré magique d'ordre 4 est extrait de la gravure de Dürer, *Melencolia*.

et en allemand. Utilisant les entiers jusqu'à 100, L. Sallows a trouvé des carrés alphamagiques d'ordre 3 dans 19 langues, mais aucun en danois et en latin.

En français, il y a exactement un carré alphamagique n'utilisant que des nombres jusqu'à 200, mais 255 autres si les éléments peuvent aller jusqu'à 300. Trois d'entre eux ont pour logarithme neuf entiers consécutifs. L'un d'eux est donné dans l'encadré ci-dessous (le premier nombre entre parenthèses est le terme numérique, le second est son logarithme).

En allemand, il n'y a pas moins de 221 exemples utilisant des nombres inférieurs à 100. L'un d'eux est dans l'encadré. Le principe de base de construction se comprendra si l'on extirpe les syllabes «und» et «zig» et remplace les «mots» restants par des nombres, ce qui donne (9).

(9)

45	62	58
68	55	42
52	48	65

 J'ai écrit le premier chiffre en rouge, car il doit être multiplié par 10 pour obtenir sa véritable contribution à la valeur numérique : ainsi «fünf-und-vierzig», signifiant cinq-et-quarante. Séparons à présent

les composantes bleues et rouges pour obtenir (10) et (11).

(10)

4	6	5
6	5	4
5	4	6

(11)

5	2	8
8	5	2
2	8	5

Chacun est un carré latin, les trois mêmes nombres apparaissant dans chaque ligne et chaque colonne (de sorte que colonnes et lignes ont mêmes sommes) et le carré étant aussi magique. C'est encore le cas lorsque les termes en rouge sont multipliés par 10 et lorsque ce dernier carré est ajouté, terme à terme, à celui à termes en bleu. Chacun des nombres obtenus a le même logarithme, 14, le carré initial étant nécessairement alphamagique.

Que dire des ordres supérieurs ? L'artifice des carrés latins orthogonaux fonctionne encore. Par exemple, en anglais, le carré dont les termes numériques sont (12) :

(12)	26	37	48	59
	49	58	27	36
	57	46	39	28
	38	29	56	47

est alphamagique. Les chiffres bleus for-

ment un carré latin d'ordre 4, les rouges de même, et la régularité de la formation des noms des nombres entre 20 et 99, en anglais, fait le reste. L. Sallows baptise du nom «d'ersatz» de tels carrés, car ils ne sont pas trop faciles à trouver. Pour trouver les vrais, il faudra dénicher des cas autrement exceptionnels, tel que (13) :

(13)	31	23	8	15
	17	5	21	34
	26	38	13	0
	3	11	35	28

Ce champ de recherche comporte au moins trois questions ouvertes, envisageables dans toute langue alphabétique.

1. Un carré est dit «normal» si ses termes sont, à l'ordre près, les entiers consécutifs à partir de 1 inclus. Pour l'ordre 3, il n'y a qu'un seul carré magique normal (à des notations ou réflexions près), et il n'est pas alphamagique. Et pour l'ordre 4 ? En anglais, le nombre total de lettres pour écrire les noms des 16 premiers entiers est 81, ce qui ferait une constante magique du carré logarithmique associé de... $81/4 = 20,25$. Ce n'est pas un entier et il n'existe donc pas, en anglais, de carré d'ordre 4 alphamagique normal. Il en est de même en français. Le même argument montre que le plus petit ordre envisageable pour un carré normal alphamagique, en anglais, est 14, avec une constante magique de 189. Personne, semble-t-il, ne sait si un tel carré existe effectivement, et c'est là la première question ouverte.

2. Existe-t-il un $3 \times 3 \times 3$ cube alphamagique ?

3. Le passage à l'associé logarithmique conduit d'un carré d'entiers à un autre et peut donc être itéré pour donner un dérivé second logarithmique, et ainsi de suite. Jusqu'où peut-on poursuivre le processus en n'obtenant que des carrés magiques ? Sans conditions autres, la réponse est : «indéfiniment». Pour voir cela, reprenons le carré alphamagique en allemand analysé précédemment. Son dérivé logarithmique, qui n'est formé que de 14, est trivialement magique. Alors son dérivé second logarithmique n'est, lui, formé que de 8, et ainsi de suite. Mais existe-t-il une langue et des exemples dans lesquels aucun des dérivés logarithmiques de tous ordres ne soit formé de termes tous égaux ?

SOLUTION DU PROBLÈME INDIQUÉ

8	19	18
25	15	5
12	11	22

Alphamagique internationale

Le premier nombre entre parenthèses indique la valeur numérique, le second le logarithme.

SWAHILI

arobaini na tano (45,14)	sitini na saba (67,12)	hamsini na tisa (59,13)
sabini na moja (71,12)	hamsini na saba (57,13)	arobaini na tatu (43,14)
hamsini na tano (55,13)	arobaini na saba (47,14)	sitini na tisa (69,12)

GALLOIS

chwech deg dau (62,12)	wyth deg (80,7)	saith deg pedwar (74,14)
wyth deg pedwar (84,13)	saith deg dau (72,11)	chwech deg (60,9)
saith deg (70,8)	chwech deg pedwar (64,15)	wyth deg dau (82,10)

FRANÇAIS

quinze (15,6)	deux cent six (206,11)	cent quinze (115,10)
deux cent douze (212,13)	cent douze (112,9)	douze (12,5)
cent neuf (109,8)	dix-huit (18,7)	deux cent neuf (209,12)

ALLEMAND

fünfundvierzig (45,14)	zweiundsechzig (62,14)	achtundfünfzig (58,14)
achtundsechzig (68,14)	fünfundfünfzig (55,14)	zweiundvierzig (42,12)
zweiundfünfzig (52,14)	achtundvierzig (48,14)	fünfundsechzig (65,14)

Créatures

CHRISTOPH PÖPPE

Grâce à ce logiciel, des êtres artificiels d'une étonnante complexité naissent, vivent et se reproduisent dans un ordinateur personnel.

Avez-vous déjà rencontré un *norn*? Ses yeux ovoïdes démesurés le font ressembler à E.T., mais il est plus petit, plus velu et plus vif. Il sautille comme un jeune chien, il observe avec curiosité tout ce qui bouge, se précipite dessus et s'y brûle parfois les doigts. Ne vous étonnez pas de ce comportement enfantin : le *norn* sort de l'œuf ; ultérieurement, quand il aura appris, il aura un comportement plus «intelligent».

L'œuf qui contenait le jeune *norn* était sur une disquette. Il a été couvé dans un fantastique engin qui tient à la fois du four à micro-ondes et du tube à essais... mais il est virtuel : tout comme la couveuse et le monde où évoluent les *norns*, il est le fruit d'un programme informatique nommé *Créatures*. Ce jeu n'est pas un de ces jeux de combat où l'on doit détruire des vaisseaux ennemis et des monstres, et ce n'est pas non plus un de ces jeux classés X qu'il faut interdire aux enfants : l'accouplement des habitants du monde virtuel est court et pudique. Ce monde, nommé *Albia*, est un paradis naturel : une petite éolienne tourne à côté d'une ruche entourée d'abeilles, des carottes pous-

sent, entourées d'autres plantes, et un funiculaire romantique conduit à une île isolée sur laquelle une foule de découvertes nous attendent (voir la figure 1).

Celui qui exécute le programme *Créatures* sur son ordinateur (à cette date, le programme ne fonctionne que sur les ordinateurs de type PC équipés de Windows 95 et d'un lecteur de disques compacts, mais une version française sortira en mars 1997 pour les ordinateurs Macintosh), n'a pas de mission spéciale, mais il peut être le démiurge d'*Albia* : le pointeur de la souris prend la forme d'une main avec laquelle on peut mettre les œufs dans la couveuse, protéger et soigner les *norns*, leur enseigner les bonnes habitudes par des caresses et par des fessées, les encourager à s'accoupler et les protéger contre les plantes empoisonnées, les bactéries et les *grendels*, qui sont des êtres semblables aux *norns*, mais malfaisants. L'éducation des *norns* doit commencer tôt : un *norn* qui n'a pas appris à respecter l'autorité du démiurge risque d'ignorer ultérieurement toutes les indications qui assureront sa survie. Le but du jeu n'est pas de marquer le plus de points pos-

sible en réussissant à élever des *norns* ; c'est surtout de découvrir les beautés des recherches sur la vie artificielle, généralement effectuées sur de gros ordinateurs.

Les jeux informatiques se fondent généralement sur un algorithme : les concepteurs envisagent toutes les situations que peuvent rencontrer les personnages conduits par l'utilisateur ; ils partent habituellement d'un scénario complexe et le décomposent en une suite d'opérations élémentaires, exécutables par l'ordinateur. Dans le cas de *Créatures*, au contraire, les spécialistes de la vie artificielle procèdent de bas en haut : le déroulement complet de la vie des *norns* et des *grendels*, tout comme l'évolution de l'écosystème d'*Albia*, n'ont pas été programmés explicitement, mais résultent d'un nombre de concepts élémentaires aussi réduit que possible.

LES CRÉATURES

Le rêve des spécialistes de vie artificielle serait d'observer, dans une soupe originelle numérique, l'apparition d'une vie qui ressemblerait à celle qui est née sur la Terre, il y a 3,5 milliards d'années. Comme cet objectif semble bien au-delà des possibilités actuelles de l'informatique, les *norns* et les *grendels* ont, d'emblée, été équipés de capacités qui les situent assez haut sur l'échelle de l'évolution : ils disposent d'un riche patrimoine héréditaire, qui code aussi bien les instincts que diverses fonctions mentales et organiques, des comportements innés ou la résistance aux maladies infectieuses.

La vie des créatures dure en moyenne 12 heures d'exécution du programme ; elle est abrégée quand un *norn* est empoi-



1. Le monde virtuel des *norns* est douze fois plus large et trois fois plus haut que les écrans d'ordinateur. La partie du monde qui apparaît sur l'écran suit automatiquement les mouvements de la créature que le joueur examine. La couveuse est dans la cuisine.

Si on y met un œuf, un enfant *norn* qui en sort 20 secondes plus tard explore aussitôt son environnement. Le monde contient des moyens de transport, tels des ascenseurs qui sont fabriqués en tige de bambou, un funiculaire et un sous-marin. Certains objets sont