

Le petit père Hadamard

LAURENT SCHWARTZ

Prototype du savant distrait, le mathématicien Jacques Hadamard fut au cœur de l'activité mathématique française pendant presque un siècle.

Le génie mathématique de Jacques Hadamard se doublait d'une grande douceur et d'une immense fermeté morale. Républicain, démocrate, il milita en faveur de Dreyfus lorsque celui-ci fut emprisonné (la femme de Dreyfus était née Hadamard), et, plus tard, il fit partie du Comité central de la Ligue des droits de l'homme : habitant dans la rue où la Ligue avait son siège, il assistait à toutes les réunions du lundi soir.

Je l'ai bien connu, car il était le mari d'une sœur de ma grand-mère maternelle. Je peux attester que sa distraction était extrême : un jour qu'Hadamard était parti pour une promenade en montagne, avec sa sœur, il lui proposa de s'asseoir un instant, pendant qu'il irait chercher des fougères, qu'il collectionnait avec passion. Après avoir ainsi herborisé un long moment, il rentra au chalet... ayant complètement oublié sa sœur, qui l'attendait toujours.

Nous verrons que cette distraction ne le quitta jamais, même dans les pires moments, pas plus que sa passion pour les fougères : il avait en permanence, dans sa poche, une loupe qui lui permettait d'identifier les spécimens, et son domicile était envahi par les herbiers.

Il était également passionné de champignons, et il les aimait sans doute autant pour leurs qualités gastronomiques que pour leur intérêt botanique : lors d'un voyage à l'étranger, il profita d'une escale de son avion

aux Açores pour aller chercher des spécimens, qu'il se fit servir au déjeuner ; à son voisin de table, qui lui en demandait, il les refusa, parce que, dit-il, leur identification n'était pas assurée. Sa passion pour la botanique lui faisait regretter que cette discipline ne fût pas enseignée dès l'école, parce qu'elle permettait aux enfants de faire de la science sans posséder les connaissances mathématiques qu'exige la physique, par exemple. Toutefois sa passion botanique ne lui faisait jamais oublier

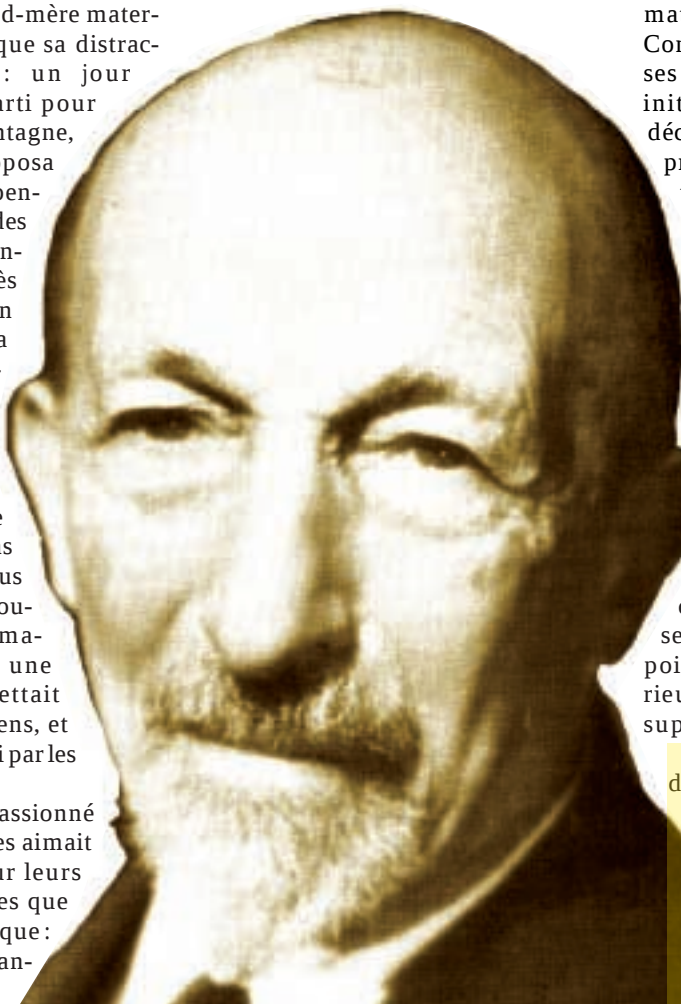
complètement les mathématiques... Car Hadamard était d'abord, et surtout, un très grand mathématicien.

Professeur médiocre, bon chercheur

Il n'avait pas de prédestination particulière pour les mathématiques. Né en 1865 d'un professeur de latin et d'une professeur de piano, Jacques Hadamard est d'abord un élève brillant, mais, alors qu'il excelle dans les matières littéraires (il a des prix du Concours général en grec et en latin), ses résultats en mathématiques sont initialement mauvais. Toutefois le déclin a lieu à temps pour qu'il entre premier à l'École normale supérieure, tandis qu'il est simultanément reçu premier à l'École polytechnique, totalisant une somme de points inégalée dans l'histoire des Grandes Écoles.

La machine est alors lancée. En 1884, alors qu'il n'est qu'élève à l'École normale, il publie dans le *Journal de mathématiques spéciales* ses premiers résultats sur le limaçon de Pascal et sur l'hypocycloïde à trois points de rebroussement : la première courbe n'est pas due à Blaise Pascal, mais à son père Étienne ; la seconde s'obtient en considérant un point d'un cercle qui roule à l'intérieur d'un cercle de rayon trois fois supérieur.

Ayant ainsi commencé par l'étude de la géométrie, il y reviendra 50 ans plus tard, pour évoquer les géométries non euclidiennes et leurs applications aux fonctions automorphes (par exemple, les fonctions définies sur le cercle et de période égale à $2\pi/3$ sont automorphes).



1. JACQUES HADAMARD (1865-1963)

À sa sortie de l'École normale supérieure, Jacques Hadamard enseigne au lycée Buffon jusqu'en 1893, pendant qu'il prépare sa thèse, qu'il passe en 1892. Âgé de 27 ans, ses travaux d'analyse révèlent alors son génie.

Cette thèse porte sur les propriétés des séries de Taylor. Dans le cas de l'ensemble des nombres réels, ces séries sont des sommes de termes de la forme $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$. La question essentielle, pour ces séries, est de connaître l'intervalle maximal de centre x_0 (où x_0 est un nombre réel) pour lequel la série de Taylor converge vers la valeur $f(x)$ d'une fonction f ; l'intervalle maximal est nommé intervalle de convergence. Par exemple, à la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ correspond la série de Taylor de centre 0 : $1 + x + x^2/(1 \times 2) + x^3/(1 \times 2 \times 3) + x^4/(1 \times 2 \times 3 \times 4) + \dots$ pour un intervalle de convergence qui est toute la droite des nombres réels.

Hadamard s'intéresse plutôt aux développements en série de Taylor de fonctions holomorphes, c'est-à-dire des fonctions définies sur un ensemble ouvert du plan des nombres complexes et dérivables en tous points de cet ouvert (les nombres complexes sont de la forme $x + iy$, où x et y sont des nombres réels, et où i est tel que $i^2 = -1$; ils peuvent se représenter par les points d'un plan). Il trouve la formule du rayon de convergence (le rayon du plus grand disque du plan où le développement en série de Taylor converge) comme l'inverse de la limite supérieure, pour n tendant vers l'infini, de la racine n -ième des modules des coefficients de la série.

Par exemple, pour la fonction exponentielle étendue aux nombres complexes, le développement en série de Taylor s'écrit, autour de l'origine : $1 + z + z^2/(1 \times 2) + z^3/(1 \times 2 \times 3) + \dots$. Les modules des coefficients sont 1, 1, $1/2$, $1/6$, $1/24$... À cette suite de nombres correspond la suite de leurs racines n -ièmes, qui sont, pour n supérieur ou égal à 1 : $1^{1/n}$, $2^{1/n}$, $3^{1/n}$, $4^{1/n}$... La limite supérieure de cette suite, quand n tend

vers l'infini, est aussi sa limite, égale à 0, de sorte que le rayon de convergence est infini. Il est incroyable qu'il ait fallu attendre Hadamard pour obtenir ce résultat, alors que Taylor lui-même avait étudié les séries qui portent aujourd'hui son nom. Toutefois Hadamard cherche surtout, à partir d'une série de Taylor, à trouver des renseignements sur son prolongement analytique dans le reste du plan complexe. Dans sa thèse, Hadamard s'intéresse aux fonctions que l'on peut prolonger, dans tout le plan complexe, en fonctions méromorphes. Les fonctions

Taylor et son prolongement analytique deviendra la bible de tous ceux qui s'intéressent au sujet.

Toutefois Hadamard est alors enseignant de lycée, et il n'a aucune idée de la difficulté relative des divers sujets mathématiques ; il ne parvient pas à se mettre au niveau des élèves. Le proviseur du lycée Buffon envisage des sanctions, mais on sait qu'Hadamard est un grand mathématicien, si bien que, sa thèse passée, le rectorat lui confie un poste d'assistant à l'Université de Bordeaux ; il y reste de 1893 à 1897.

Nouvelles fonctions, nouveaux résultats mathématiques : à Bordeaux, Hadamard s'intéresse aux fonctions entières, c'est-à-dire aux fonctions dont le développement en série converge dans tout le plan complexe. Soucieux du comportement à l'infini de telles fonctions, il s'intéresse aux relations entre trois quantités : la décroissance à l'infini des coefficients du développement en série de Taylor de la fonction autour de l'origine ; la croissance du maximum du module de la fonction sur des cercles concentriques, centrés sur l'origine, de rayon tendant vers l'infini (les fonctions étudiées associent un nombre complexe $f(z)$ à chaque nombre complexe z ; si on écrit $f(z)$ sous la forme

$x + iy$, leur module est égal à $\sqrt{x^2 + y^2}$; et la répartition des zéros de la fonction dans le plan complexe (les zéros sont les points où la fonction s'annule).



Il fit mieux, un soir qu'il devait conduire deux parentes au bal. A dix heures, l'une de ces dames ayant paru « Mon cousin, dit-elle, il est temps. » Mais Zéphyrin, dont les regards ont rencontré l'ébauche d'un intéressant problème, répond : « Partez devant ! Vous ne serez pas au pont Neuf que je vous aurai déjà rattrapées. »

2. LE SAVANT COSINUS, de Christophe, n'a rien à envier à Jacques Hadamard, qui oublia sa sœur en montagne parce qu'il s'était absorbé dans la récolte de fougères.

méromorphes sont des fonctions holomorphes dans un ensemble ouvert du plan complexe, sauf en un nombre discret de points qui sont des pôles ; les fonctions méromorphes tendent vers l'infini en chacun de ces pôles. Autour des pôles, on exprime parfois ces fonctions par une série, dite de Laurent, qui comporte à la fois des termes élevés à des puissances positives et négatives : autour d'un pôle z_0 , une fonction f d'une variable complexe z s'écrit en effet : $a_{-k}(z-z_0)^{-k} + \dots + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \dots$. La série tend vers l'infini au point z_0 si le coefficient a_{-k} est non nul ; l'ordre du pôle est alors k . La publication intitulée *La série de*

Les nombres premiers

Ce travail, qui lui vaut le Grand Prix des sciences mathématiques, le conduit vers la théorie des nombres, avec un théorème qui donne la répartition des nombres premiers. Le mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866) avait introduit une fonction nommée fonction *dzêta* qui, à un nombre complexe z , associe la somme $1/1^z + 1/2^z + 1/3^z + \dots$. Bien auparavant, le Suisse Leonhard Euler (1707-