

À sa sortie de l'École normale supérieure, Jacques Hadamard enseigne au lycée Buffon jusqu'en 1893, pendant qu'il prépare sa thèse, qu'il passe en 1892. Âgé de 27 ans, ses travaux d'analyse révèlent alors son génie.

Cette thèse porte sur les propriétés des séries de Taylor. Dans le cas de l'ensemble des nombres réels, ces séries sont des sommes de termes de la forme $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$. La question essentielle, pour ces séries, est de connaître l'intervalle maximal de centre x_0 (où x_0 est un nombre réel) pour lequel la série de Taylor converge vers la valeur $f(x)$ d'une fonction f ; l'intervalle maximal est nommé intervalle de convergence. Par exemple, à la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ correspond la série de Taylor de centre 0 : $1 + x + x^2/(1 \times 2) + x^3/(1 \times 2 \times 3) + x^4/(1 \times 2 \times 3 \times 4) + \dots$ pour un intervalle de convergence qui est toute la droite des nombres réels.

Hadamard s'intéresse plutôt aux développements en série de Taylor de fonctions holomorphes, c'est-à-dire des fonctions définies sur un ensemble ouvert du plan des nombres complexes et dérivables en tous points de cet ouvert (les nombres complexes sont de la forme $x + iy$, où x et y sont des nombres réels, et où i est tel que $i^2 = -1$; ils peuvent se représenter par les points d'un plan). Il trouve la formule du rayon de convergence (le rayon du plus grand disque du plan où le développement en série de Taylor converge) comme l'inverse de la limite supérieure, pour n tendant vers l'infini, de la racine n -ième des modules des coefficients de la série.

Par exemple, pour la fonction exponentielle étendue aux nombres complexes, le développement en série de Taylor s'écrit, autour de l'origine : $1 + z + z^2/(1 \times 2) + z^3/(1 \times 2 \times 3) + \dots$. Les modules des coefficients sont 1, 1/2, 1/6, 1/24... À cette suite de nombres correspond la suite de leurs racines n -ièmes, qui sont, pour n supérieur ou égal à 1 : $1/\sqrt[n]{1}, 2/\sqrt[n]{1/2}, 3/\sqrt[n]{1/6} \dots$. La limite supérieure de cette suite, quand n tend

vers l'infini, est aussi sa limite, égale à 0, de sorte que le rayon de convergence est infini. Il est incroyable qu'il ait fallu attendre Hadamard pour obtenir ce résultat, alors que Taylor lui-même avait étudié les séries qui portent aujourd'hui son nom. Toutefois Hadamard cherche surtout, à partir d'une série de Taylor, à trouver des renseignements sur son prolongement analytique dans le reste du plan complexe. Dans sa thèse, Hadamard s'intéresse aux fonctions que l'on peut prolonger, dans tout le plan complexe, en fonctions méromorphes. Les fonctions

Taylor et son prolongement analytique deviendra la bible de tous ceux qui s'intéressent au sujet.

Toutefois Hadamard est alors enseignant de lycée, et il n'a aucune idée de la difficulté relative des divers sujets mathématiques; il ne parvient pas à se mettre au niveau des élèves. Le proviseur du lycée Buffon envisage des sanctions, mais on sait qu'Hadamard est un grand mathématicien, si bien que, sa thèse passée, le rectorat lui confie un poste d'assistant à l'Université de Bordeaux; il y reste de 1893 à 1897.

Nouvelles fonctions, nouveaux résultats mathématiques : à Bordeaux, Hadamard s'intéresse aux fonctions entières, c'est-à-dire aux fonctions dont le développement en série converge dans tout le plan complexe. Soucieux du comportement à l'infini de telles fonctions, il s'intéresse aux relations entre trois quantités : la décroissance à l'infini des coefficients du développement en série de Taylor de la fonction autour de l'origine; la croissance du maximum du module de la fonction sur des cercles concentriques, centrés sur l'origine, de rayon tendant vers l'infini (les fonctions étudiées associent un nombre complexe $f(z)$ à chaque nombre complexe z ; si on écrit $f(z)$ sous la forme

$x + iy$, leur module est égal à $\sqrt{x^2 + y^2}$); et la répartition des zéros de la fonction dans le plan complexe (les zéros sont les points où la fonction s'annule).



Il fit mieux, un soir qu'il devait conduire deux parentes au bal. A dix heures, l'une de ces dames ayant paru « Mon cousin, dit-elle, il est temps. » Mais Zéphyrin, dont les regards ont rencontré l'ébauche d'un intéressant problème, répond : « Partez devant! Vous ne serez pas au pont Neuf que je vous aurai déjà rattrapées. »

2. LE SAVANT COSINUS, de Christophe, n'a rien à envier à Jacques Hadamard, qui oublia sa sœur en montagne parce qu'il s'était absorbé dans la récolte de fougères.

méromorphes sont des fonctions holomorphes dans un ensemble ouvert du plan complexe, sauf en un nombre discret de points qui sont des pôles; les fonctions méromorphes tendent vers l'infini en chacun de ces pôles. Autour des pôles, on exprime parfois ces fonctions par une série, dite de Laurent, qui comporte à la fois des termes élevés à des puissances positives et négatives : autour d'un pôle z_0 , une fonction f d'une variable complexe z s'écrit en effet : $a_{-k}(z-z_0)^{-k} + \dots + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \dots$. La série tend vers l'infini au point z_0 si le coefficient a_{-k} est non nul; l'ordre du pôle est alors k . La publication intitulée *La série de*

Les nombres premiers

Ce travail, qui lui vaut le Grand Prix des sciences mathématiques, le conduit vers la théorie des nombres, avec un théorème qui donne la répartition des nombres premiers. Le mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866) avait introduit une fonction nommée fonction *dzêta* qui, à un nombre complexe z , associe la somme $1/1^z + 1/2^z + 1/3^z + \dots$. Bien auparavant, le Suisse Leonhard Euler (1707-

1783) avait observé que cette somme est égale au produit de termes de la forme $1/(1-1/p^2)$, où les p sont les nombres premiers : Euler jetait ainsi un pont entre la géométrie analytique et la théorie des nombres. Reprenant le problème, Riemann observa que tous les zéros de la fonction autres que $-2, -4, -6, -8...$ semblaient avoir une partie réelle égale à $1/2$ (voir la figure 5). Mieux encore, dans le cas où cette hypothèse (aujourd'hui nommée conjecture de Riemann) serait exacte, alors le nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre n serait de l'ordre de $n/\log(n)$, pour les valeurs de n tendant vers l'infini.

Hadamard est gêné par la conjecture de Riemann, qui est indémontrée (elle a été vérifiée par ordinateur pour plusieurs millions de zéros, et le mathématicien britannique Godfrey Hardy a démontré qu'une infinité de zéros de ζ a $1/2$ comme partie réelle, mais elle reste indémontrée) ; aussi cherche-t-il un moyen de démontrer le théorème de la répartition des nombres premiers qui s'en affranchisse. Il le trouve, en fondant son étude sur des résultats moins ambitieux, mais démontrés, à savoir que la fonction ζ ne s'annule jamais pour les nombres complexes de la forme $1 + iy$, où y est un nombre réel quelconque. Puis, à l'aide de cette ingénieuse astuce, il démontre le théorème de répartition des nombres premiers (le même théorème est également démontré par Charles-Jean de la Vallée-Poussin, à Louvain).

Naturellement ce théorème ne donne qu'une place approchée du n -ième nombre premier, et la position exacte des nombres premiers ne pourrait être donnée que par une série infinie. Pouvaient-on trouver cette série ? Hadamard se convainc qu'il faudrait disposer d'une démonstration de l'hypothèse de Riemann. Il poursuit son étude et trouve un théorème de symétrie de la fonction ζ . Son

mémoire est, à nouveau, couronné par l'Académie des sciences.

Ses remarquables capacités ainsi reconnues, il est nommé maître de conférences à la Sorbonne, en 1897. À ce poste, qu'il occupe jusqu'en 1909, il poursuit l'étude des fonctions de la variable complexe et obtient très rapidement ce que l'on nomme aujourd'hui le théorème du minimum de Hadamard : pour toute fonction f d'une variable complexe z , il existe une suite de cercles centrés sur l'origine et de rayon tendant vers l'infini, sur lesquels le minimum du module de la fonction est du même ordre de grandeur que l'inverse du maximum du module de la fonction.

Par exemple, pour la fonction $f(z) = e^z$, le maximum du module sur le cercle de rayon r est e^r , tandis que le minimum du module est e^{-r} ; dans cet exemple, le minimum du module est exactement égal à l'inverse du maximum du module (e^{-r} est égal à $1/e^r$), et la relation est vraie pour tous les cercles, car la fonction e^z ne s'annule jamais. Cependant, pour d'autres fonc-

tions, seul le résultat donné par le théorème du minimum subsiste.

Puis, en 1898, un an seulement après sa nomination, il étudie les surfaces de courbure totale négative ayant un nombre fini de nappes s'étendant jusqu'à l'infini (un cylindre d'axe vertical, par exemple, est une surface à deux nappes : un point peut partir vers l'infini soit vers le haut, soit vers le bas ; sa courbure est nulle).

Pour cette étude, il considère les géodésiques, c'est-à-dire les courbes analogues aux grands cercles de la sphère. Sur ces surfaces à courbure totale négative (chacun de leurs points est analogue à une selle de cheval), les géodésiques sont de trois types : soit elles sont fermées ou asymptotiquement proches de courbes fermées ; soit elles s'étendent à l'infini en restant sur une des nappes ; soit des segments entiers de ces géodésiques s'approchent successivement d'une série de géodésiques fermées, la longueur de ces segments croissant jusqu'à l'infini. Hadamard analyse les propriétés de l'ensemble des tangentes aux géodésiques.

Hadamard passe ainsi à la topologie. En fait, il mène plusieurs études de front, puisque, en 1903, il publie ses *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique* : depuis ses contacts avec le physicien Pierre Duhem, à l'Université de Bordeaux, Hadamard s'intéresse à la physique.

À propos de la propagation des ondes et de l'équation des ondes, il met en évidence les comportements différents des ondes dans des espaces de dimensions différentes, montrant notamment une différence importante entre les dimensions paires et impaires : dans les espaces de dimension impaire, tel le nôtre, le son qui est émis à partir d'un point rayonne en restant sur une sphère dont le rayon croît à vitesse régulière (la vitesse du son) ; en revanche, dans les espaces de dimension paire (un plan, par

Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor ;

PAR M. J. HADAMARD,

Ancien élève de l'École Normale supérieure.

INTRODUCTION.

Le développement de Taylor rend d'importants services aux mathématiciens, en raison de sa grande généralité. Lui seul, en effet, permet de représenter une fonction analytique quelconque, à certains cas singuliers près.

Depuis les travaux d'Abel et de Cauchy, on sait qu'à toute fonction régulière dans un certain cercle correspond un développement de Taylor, et réciproquement. C'est même ce développement que M. Weierstrass, et, en France, M. Méray emploient pour définir la fonction.

Un point α étant donné au hasard, on pourra, en général, former une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $x - \alpha$ et qui représentera notre fonction dans le voisinage du point α . Il pourra y avoir exception pour certaines positions particulières du point α . C'est à ces points particuliers que l'on donne le nom de points singuliers.

On peut donc dire que se donner une fonction analytique non singulière au point $x = \alpha$, c'est se donner une suite de coefficients α_n ,

3. L'UN DES PREMIERS RÉSULTATS notables d'Hadamard porte sur des fonctions données par des séries de Taylor, de la forme $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$