

1783) avait observé que cette somme est égale au produit de termes de la forme $1/(1-1/p^2)$, où les p sont les nombres premiers : Euler jetait ainsi un pont entre la géométrie analytique et la théorie des nombres. Reprenant le problème, Riemann observa que tous les zéros de la fonction autres que $-2, -4, -6, -8, \dots$ semblaient avoir une partie réelle égale à $1/2$ (voir la figure 5). Mieux encore, dans le cas où cette hypothèse (aujourd'hui nommée conjecture de Riemann) serait exacte, alors le nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre n serait de l'ordre de $n/\log(n)$, pour les valeurs de n tendant vers l'infini.

Hadamard est gêné par la conjecture de Riemann, qui est indémontrée (elle a été vérifiée par ordinateur pour plusieurs millions de zéros, et le mathématicien britannique Godfrey Hardy a démontré qu'une infinité de zéros de $\zeta(s)$ a $1/2$ comme partie réelle, mais elle reste indémontrée) ; aussi cherche-t-il un moyen de démontrer le théorème de la répartition des nombres premiers qui s'en affranchisse. Il le trouve, en fondant son étude sur des résultats moins ambitieux, mais démontrés, à savoir que la fonction $\zeta(s)$ ne s'annule jamais pour les nombres complexes de la forme $1 + iy$, où y est un nombre réel quelconque. Puis, à l'aide de cette ingénieuse astuce, il démontre le théorème de répartition des nombres premiers (le même théorème est également démontré par Charles-Jean de la Vallée-Poussin, à Louvain).

Naturellement ce théorème ne donne qu'une place approchée du n -ième nombre premier, et la position exacte des nombres premiers ne pourrait être donnée que par une série infinie. Pouvait-on trouver cette série ? Hadamard se convainc qu'il faudrait disposer d'une démonstration de l'hypothèse de Riemann. Il poursuit son étude et trouve un théorème de symétrie de la fonction $\zeta(s)$. Son

mémoire est, à nouveau, couronné par l'Académie des sciences.

Ses remarquables capacités ainsi reconnues, il est nommé maître de conférences à la Sorbonne, en 1897. À ce poste, qu'il occupe jusqu'en 1909, il poursuit l'étude des fonctions de la variable complexe et obtient très rapidement ce que l'on nomme aujourd'hui le théorème du minimum de Hadamard : pour toute fonction f d'une variable complexe z , il existe une suite de cercles centrés sur l'origine et de rayon tendant vers l'infini, sur lesquels le minimum du module de la fonction est du même ordre de grandeur que l'inverse du maximum du module de la fonction.

Par exemple, pour la fonction $f(z) = e^z$, le maximum du module sur le cercle de rayon r est e^r , tandis que le minimum du module est e^{-r} ; dans cet exemple, le minimum du module est exactement égal à l'inverse du maximum du module (e^{-r} est égal à $1/e^r$), et la relation est vraie pour tous les cercles, car la fonction e^z ne s'annule jamais. Cependant, pour d'autres fonc-

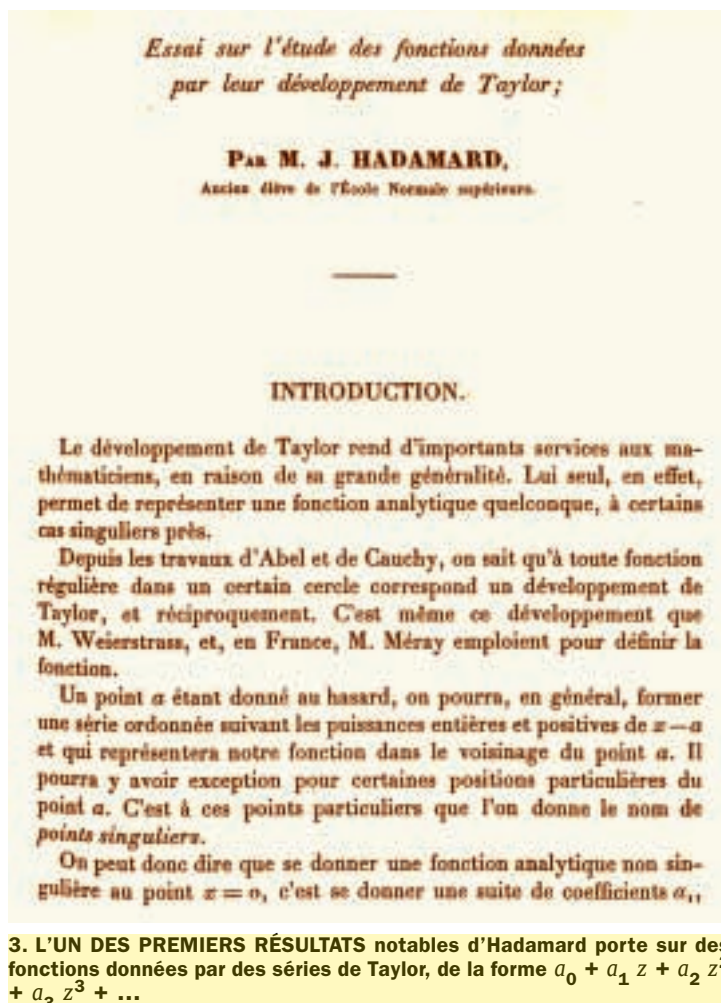
tions, seul le résultat donné par le théorème du minimum subsiste.

Puis, en 1898, un an seulement après sa nomination, il étudie les surfaces de courbure totale négative ayant un nombre fini de nappes s'étendant jusqu'à l'infini (un cylindre d'axe vertical, par exemple, est une surface à deux nappes : un point peut partir vers l'infini soit vers le haut, soit vers le bas ; sa courbure est nulle).

Pour cette étude, il considère les géodésiques, c'est-à-dire les courbes analogues aux grands cercles de la sphère. Sur ces surfaces à courbure totale négative (chacun de leurs points est analogue à une selle de cheval), les géodésiques sont de trois types : soit elles sont fermées ou asymptotiquement proches de courbes fermées ; soit elles s'étendent à l'infini en restant sur une des nappes ; soit des segments entiers de ces géodésiques s'approchent successivement d'une série de géodésiques fermées, la longueur de ces segments croissant jusqu'à l'infini. Hadamard analyse les propriétés de l'ensemble des tangentes aux géodésiques.

Hadamard passe ainsi à la topologie. En fait, il mène plusieurs études de front, puisque, en 1903, il publie ses *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique* : depuis ses contacts avec le physicien Pierre Duhem, à l'Université de Bordeaux, Hadamard s'intéresse à la physique.

À propos de la propagation des ondes et de l'équation des ondes, il met en évidence les comportements différents des ondes dans des espaces de dimensions différentes, montrant notamment une différence importante entre les dimensions paires et impaires : dans les espaces de dimension impaire, tel le nôtre, le son qui est émis à partir d'un point rayonne en restant sur une sphère dont le rayon croît à vitesse régulière (la vitesse du son) ; en revanche, dans les espaces de dimension paire (un plan, par



exemple), il remplit toute la boule, et non seulement la surface de la sphère qui la limite.

Ainsi la musique, que pratique Hadamard (il joue du violon) serait différente si notre Univers avait un nombre pair de dimensions ; en fait, les ondes décrites par une équation qui tient compte de phénomènes d'amortissement et de perturbations remplissent toujours la boule, comme dans le cas des dimensions paires. En outre, Hadamard donne un théorème de descente, qui permet de connaître les solutions aux dimensions inférieures, quand on connaît une solution dans une dimension donnée.

Restant dans cette problématique, de 1904 à 1921, il cherche les solutions complètes du problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre : en termes physiques, ce problème consiste, par exemple, à chercher la forme d'une corde vibrante, à n'importe quel instant, quand on la lâche, à partir d'une forme imposée, chaque point de la corde étant lancé avec une vitesse imposée et les extrémités restant fixes.

À la Sorbonne, Hadamard expose les résultats de ses recherches, en se souciant toujours de faire part aux étudiants de son idée des problèmes bien posés : un problème est bien posé s'il a une solution et si, de plus, la solution dépend continûment des données ; une petite variation des données ne doit apporter qu'une petite variation des solutions.

Cette question de stabilité le passionne tant qu'elle le conduit à reprendre l'étude des géodésiques des surfaces, en montrant que, si l'on part d'un point avec une petite variation de la direction initiale, cela peut amener le trajet final à varier considérablement. Ainsi Hadamard pose le problème de la stabilité à long terme du Système solaire.

La fondation Silliman de l'Université Yale publie ce travail, dans un livre de 600 pages : *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. Cette publication est un peu paradoxale, car l'argent donné par M. Silliman à l'Université Yale doit servir à « instituer annuellement une série de leçons destinées à démontrer la prévoyance, la sagesse et la bonté de Dieu, telles qu'elles se manifestent dans le monde tant naturel que moral. La conviction

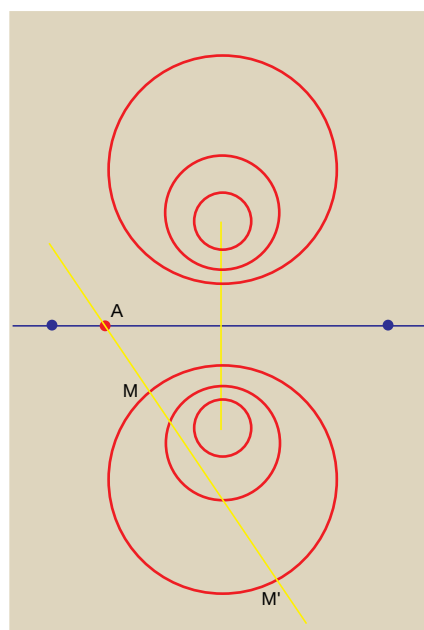
du testateur est que toute présentation bien ordonnée des faits de la nature ou de l'histoire contribue au but de cette fondation plus efficacement que n'importe quelle tentative de développement sur les principes de la doctrine ou de la foi ; et, en conséquence, il a entendu exclure du but de la fondation des leçons de théologie dogmatique ou polémique, et le réserver bien plutôt aux sujets empruntés aux domaines des sciences de la nature ou de l'histoire, tout particulièrement de l'astronomie, de la chimie, de la géologie et de l'anatomie.

Or Hadamard, bien qu'issu d'une famille juive d'Alsace, est absolument athée, et ses mathématiques ne sont ni des sciences de la nature, ni de l'histoire, ni de l'astronomie, ni enfin de la chimie, de la géologie ou de l'anatomie. Qu'importe ! Ce texte est utile à de nombreux mathématiciens, et ma propre théorie des distributions lui doit beaucoup : j'ai passé trois mois de vacances à l'étudier.

Le rayonnement international

Hadamard est au faite de sa gloire quand il est nommé professeur au Collège de France, en 1909. Il y enseigne jusqu'en 1937, en même temps qu'à l'École polytechnique et à l'École centrale. Au Collège de France, la devise de ses séminaires du mardi et du vendredi est : « Généraliser pour simplifier ou pour mieux comprendre ». Parfois Hadamard cite également Poincaré : « Il n'y a pas des problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas : il y a des problèmes plus ou moins résolus. » Les plus grands mathématiciens du monde s'honorent de venir présenter leurs travaux ou de commenter ceux d'autrui à ces séminaires. Paul Lévy a indiqué que, pour des étudiants avancés, Hadamard était un remarquable professeur, parce qu'il montrait toujours des mathématiques qu'il avait personnellement étudiées ; il insistait sur les idées générales et sur les erreurs qu'il importait d'éviter.

En contrepartie, il reste un piètre guide pour les jeunes. En 1931, quand il est élu à l'Académie des sciences, je suis en classe de Première et je veux le voir spécialement afin qu'il me conseille. Il me parle de la fonction ζ de Riemann, que je ne connais pas, et de la répartition des nombres



4. LES SIX CERCLES en rouge appartiennent à un même faisceau, dont l'axe radical est la droite bleue : pour chaque point A de la droite, le produit $AM \cdot AM'$ est identique, quel que soit le point A et quelle que soit la droite passant par A et coupant les cercles du faisceau en M et M'. Hadamard utilisa de tels faisceaux de cercles pour construire des points imaginaires (ici en bleu).

premiers. Je ne comprends rien : « Je trouve que tu n'es pas très compétent », me dit-il. L'entretien se poursuit néanmoins, et il aborde ensuite le trinôme du second degré, dont je lui dis la formule des racines par cœur : « Je vois que tu es très savant », remarque-t-il, ce qui me démontre, d'une part, que j'apprendrais difficilement avec lui, et, d'autre part, qu'il ne fait aucune différence entre le simple et le compliqué.

En 1932, il publie un livre monumental, commencé à Bordeaux : un traité de géométrie élémentaire en deux volumes, qui est mon livre de chevet quand je suis en classe de Terminale. Cet ouvrage contient un nombre incroyable de problèmes, mais il y a aussi des erreurs d'axiomatique : par exemple, sans s'en apercevoir, Hadamard démontre que la dimension de l'espace est égale à trois.

Il introduit des points imaginaires du plan, sans faire référence aux nombres imaginaires de l'ensemble des nombres complexes, puisqu'il veut une œuvre purement géométrique. Il considère les couples de cercles : si deux cercles ne se coupent pas (en deux points), définit-il, alors ils se coupent en deux points imaginaires conju-