

Pour mieux cerner ces phénomènes électrocinétiques en vraie grandeur, et passer du qualitatif au quantitatif, une équipe associant l'Institut de physique du Globe de Paris, l'École normale supérieure, le Commissariat à l'énergie atomique et le Centre de géophysique de Garchy a organisé une première expérience sur le terrain. Le site choisi fut celui du Mayet-de-Montagne, près de Vichy, où plusieurs forages dans le granite recoupent, à 200 mètres de profondeur, une zone altérée subhorizontale de quelques mètres d'épaisseur et de forte perméabilité. Lors de l'expérience, on pompait l'eau d'un des forages afin de provoquer une circulation d'eau importante, dont les effets électrocinétiques étaient enregistrés par deux magnétomètres et par un réseau de 15 électrodes installées, tant en profondeur, à proximité de la zone altérée, qu'en surface.

Après avoir résolu les multiples problèmes que pose une telle expérimentation (signaux parasites des clôtures électriques, dévidage de kilomètres de câbles à travers bois et champs, creusement de longues tranchées pour que ces mêmes câbles échappent à la curiosité masticatoire des vaches, etc.), nous avons enregistré un signal électrique qui a d'abord semblé décevant : le bruit électrique continu était de forte amplitude – 200 millivolts sur des lignes de 50 mètres de long ! – et d'une période caractéristique comprise entre 5 et 10 secondes. À ce niveau de bruit, ni le pompage ni le rééquilibrage ultérieur de l'aquifère n'engendraient de signal perceptible.

En revanche, l'élimination des bruits parasites par un filtrage fait apparaître un signal électrique systématique dans les dix minutes qui suivent l'arrêt de la pompe, décroissant en proportion de la hauteur d'eau dans le puits, enregistrée en parallèle. Il s'agit donc bien d'un signal d'électrofiltration, avec des différences de potentiel maximales de l'ordre de 10 millivolts pour 100 mètres de distance, pour une perturbation de hauteur d'eau d'environ une atmosphère. En outre, un signal magnétique se distingue légèrement du bruit de fond au moment où l'on enregistre le signal électrique ; il faudra cependant attendre l'analyse détaillée de l'ensemble de ces données, incluant celles du magnétomètre de référence, pour conclure à un effet magnétique clairement identifié.

Ce signal n'est pas d'interprétation facile, car les différences de potentiel entre les électrodes ne décroissent pas nettement avec la distance, ce qui témoignerait d'une forte hétérogénéité des propriétés électriques du massif granitique. Dans les zones sismiques, pour les mêmes raisons d'hétérogénéité électrique de la croûte, l'éventuelle détection



2. Échantillon de roche (cylindre) où l'on fait circuler de l'eau ; une différence de potentiel électrique apparaît entre les faces d'entrée et de sortie de l'eau.



3. Descente d'une électrode dans un des puits de Mayet-de-Montagne.

d'une source électrique profonde par des réseaux d'électrodes ou de magnétomètres installés en surface ne permettra sans doute pas de localiser ni de caractériser cette source de manière précise : d'autres mesures géophysiques complémentaires seront indispensables pour comprendre les processus physiques de déformation profonde. C'est

dans cet esprit que nous établissons aujourd'hui un réseau de surveillance continue du golfe de Corinthe, dans le cadre du projet européen GAIA. L'expérience du Mayet-de-Montagne devrait faciliter les interprétations des mesures magnétotelluriques, appuyées par les observations sismologiques, géodésiques et hydrogéologiques.

Pascal BERNARD est sismologue à l'Institut de physique du Globe.

L'expérience du Mayet-de-Montagne a été réalisée par P. PINETTES, P. BERNARD, et F. CORNET de l'I.P.G.P., L. JOUNIAUX et J.-P.

POZZI de l'E.N.S., V. BARTHES du C.E.A., G. OGANESSIAN et G. NOZIERES de Garchy.

Archimède(s), l'émission franco-allemande de vulgarisation scientifique d'ARTE, présente ce sujet les mardi 4 et 11 mars à 20 heures.

Les mélanges de cartes

JEAN-PAUL DELAHAYE

Le difficile passage de l'ordre au désordre, ou les illusions du mélange.

Avec des cartes, on peut jouer à plusieurs (belote, bridge, poker, etc.), faire des patiences, réaliser des tours de magie ou faire semblant d'y déchiffrer l'avenir. On peut aussi manipuler les cartes pour le simple plaisir de découvrir des structures mathématiques. On expérimente ainsi très concrètement les notions d'ordre et de désordre : l'ordre, c'est un paquet classé, le désordre, c'est un paquet battu. Le passage du premier état au second s'appelle le mélange, moins simple à pratiquer qu'on ne le pense.

RETOUR AU DÉPART

Pour bien mélanger – croit-on – il suffit de faire n'importe quoi avec application et assez longtemps ! Erreur : un théorème de théorie des groupes indique qu'il ne faut pas trop s'appliquer. Ce théorème énonce que « tout élément d'un groupe fini possède une puissance qui est l'identité ». Appliqué aux opérations de mélange d'un jeu de cartes, qui forment un groupe fini, le théorème indique que si vous effectuez de manière répétée le même mélange, vous reviendrez toujours à votre

point de départ, c'est-à-dire à l'ordre initial du paquet. Le nombre de fois qu'il faut appliquer l'opération de mélange pour revenir au paquet initial est la *période* de l'opération.

L'opération d'inversion d'un paquet (la première carte devient la dernière, la seconde l'avant-dernière, etc.) a une période 2 : si vous inversez deux fois un paquet, vous revenez bien sûr à votre point de départ. Ce retour, le théorème l'affirme, n'est pas exceptionnel mais général.

Examinons un second exemple de mélange un peu plus intéressant et que nous appellerons le *mélange binaire*. Il comprend trois étapes :

(1) On prend le paquet dans la main, faces en dessous.

(2) On retourne la première carte et on la place à gauche sur la table, on retourne la deuxième carte et on la place à droite sur la table, et ainsi de suite alternativement à gauche et à droite, ce qui constitue deux nouveaux paquets.

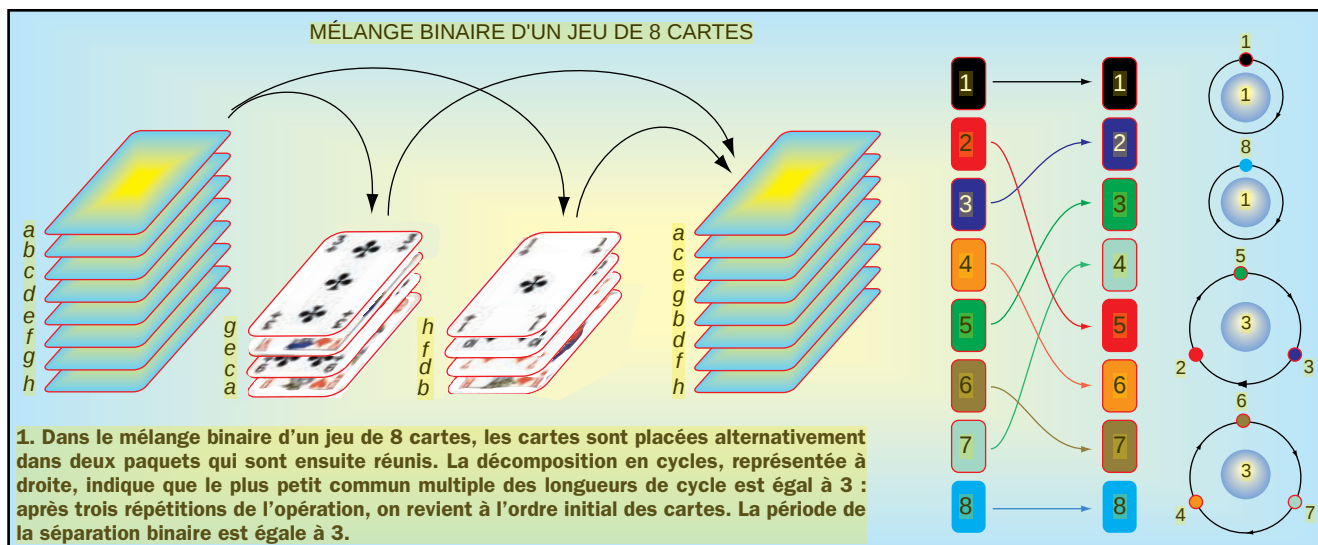
(3) Toutes les cartes ainsi disposées, on place le paquet de droite sur celui de gauche (remarquez que la carte initialement sous le paquet y subsiste, de même que la carte du dessus).

Avec un jeu de 32 cartes, cette opération, répétée cinq fois, redonne l'ordre de départ : sa période est 5. Si vous partez d'un jeu complètement classé – 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as – dans l'ordre trèfles, carreaux, cœurs, piques –, après trois opérations de mélange binaire, le jeu est classé par niveaux : les quatre « 7 », puis les quatre « 8 », etc. Vous aviez cru mélanger consciencieusement le paquet, alors que vous êtes passé d'un ordre à un autre avant de revenir à l'ordre initial. Pour 52 cartes, la période du mélange binaire est 8, et le jeu est classé par niveaux après six étapes.

L'arithmétique permet d'en savoir plus sur le mélange binaire : pour 2^n cartes, la période est n . Le résultat général est que, pour un jeu de $2m$ cartes, la période est le plus petit entier p tel que $2^p - 1$ soit divisible par $2m - 1$. Le petit théorème de Fermat indique que si q est un nombre premier qui ne divise pas k , alors $k^{q-1} - 1$ est divisible par q . Ici (en prenant k égal à 2 et q égal à $2m - 1$), on obtient que, si $2m - 1$ est un nombre premier, alors $2^{2m-2} - 1$ est divisible par $2m - 1$: ainsi, lorsque $2m - 1$ est un nombre premier, $2m - 2$ opérations de mélange binaire suffisent toujours pour replacer un jeu de $2m$ cartes dans son ordre initial.

Si, dans la dernière étape du déroulement du mélange binaire, on place le paquet de gauche sur celui de droite (au lieu de droite sur gauche), on obtient une opération de mélange très différente, que nous désignerons par la *variante du mélange binaire*, dont la période est 10 avec 32 cartes. Il apparaît alors deux étapes intermédiaires où les cartes sont classées par niveaux (une fois par niveaux croissants, une fois par niveaux décroissants), et, de plus, à la fin de l'étape 5, le jeu est dans l'ordre inversé.

La période de la variante du mélange binaire avec 52 cartes est 52, et chaque



carte passe par les 52 positions possibles dans le jeu quand on effectue 52 fois l'opération. Dans le cas général pour n cartes, la période de la variante du mélange binaire pour n cartes est la période du mélange binaire.

LE MÉLANGE DESSUS-DESSOUS

Il est difficile de connaître *a priori* la période d'une opération de mélange, comme le montre l'exemple suivant, apparemment proche du précédent. Cette opération de mélange est très naturelle, car elle est rapide et ne nécessite pas de table pour poser les cartes ; nous l'appellerons le *mélange dessus-dessous* (on l'appelle parfois mélange de Monge, car Gaspar Monge s'y est intéressé en 1773).

Vous prenez le jeu dans votre main gauche, vous faites passer la première carte (celle au-dessus) dans la main droite, puis la seconde sur la première, puis la troisième sous le paquet de deux cartes que vous avez en main droite, puis la quatrième sur le paquet de trois cartes, etc. Cette fois, avec un jeu de 32 cartes, il faudra réaliser six fois l'opération avant de retrouver le classement initial du paquet. Pour un jeu de 52 cartes, la période est 12. On peut démontrer qu'avec 2^n cartes la période du mélange dessus-dessous est $n + 1$ (à comparer avec le mélange binaire).

Les opérations de mélange que nous avons considérées ont toutes une période relativement petite : on revient rapidement au point de départ. Est-ce toujours le cas ?

Pour connaître la réponse, regardons comment les cartes changent de place dans une opération de mélange. On s'aperçoit (voir les figures 1 et 2) que toute carte suit un cycle : par exemple, la carte en position 2 passe à la place numéro 5, puis à la place numéro 3, puis revient à la place numéro 2. Toute opération de mélange se décompose ainsi en cycles. Si une opération de mélange est composée d'un cycle de longueur 3 pour une carte et d'un autre de longueur 5, alors la période de cette opération est le produit de 3 et 5, c'est-à-dire 15.

Si une opération de mélange est composée de cycles de longueur $n, m, \dots, p$, la période de cette opération est le plus petit commun multiple des entiers $n, m, \dots, p$. S'il y a des cycles de longueur 4, 5 et 6, la période sera 60 (60 est un multiple de 4, de 5 et de 6 ; de tous les multiples communs à 4, 5 et 6, 60 est le plus petit).

Comme chaque carte apparaît dans un cycle et un seul, la somme des longueurs des cycles d'un mélange d'un jeu de 32 cartes est égale à 32 (une carte

qui reste à sa place compte comme un cycle de longueur 1).

Les périodes possibles des opérations de mélange sont donc tous les nombres qui sont plus petit commun multiple d'entiers dont la somme est égale à 32. Puisque $15 + 5 + 5 + 5 + 2 = 32$, et que le plus petit commun multiple de 15, 5, 5, 5, 2 est 30, 30 est une période possible pour une opération de mélange.

Une recherche systématique dans tous les mélanges possibles montre alors que la période la plus grande possible pour un jeu de 32 cartes est

5 460, obtenu comme le produit des nombres 3, 4, 5, 7, 13, dont la somme est 32. Dans toute opération de mélange, on est certain de repasser par l'ordre initial avant le 5 460^e essai.

Existe-t-il des opérations de mélange simples de période 5 460 ? Oui, en voici un exemple : extraire les cartes de rang 1, 8, 13, 17 et 22 du jeu en les plaçant à la fin du jeu à mesure qu'on les enlève (la carte de rang 22 se retrouve donc dernière dans le nouveau paquet). En l'appliquant consciencieusement, vous reviendrez au classement initial au bout de 5 460 étapes, mais pas avant. Sur la figure 6, nous avons indiqué la décomposition en cycles de cette opération de mélange.

Pour le jeu de 52 cartes, la période maximale d'une opération de mélange est 180 180 qui est le produit des nombres 4, 5, 7, 9, 11, 13. Leur somme fait 49, car pour 49, 50, 51 et 52 la période maximale est la même (voir la figure 3). Une opération simple ayant cette période consiste à extraire du jeu les cartes de rang 4, 7, 12, 19, 28, 34 en les plaçant à la fin du jeu au fur et à mesure qu'on les enlève. Dans cette opération, il y a trois cycles de longueur 1 qui, avec les autres cycles, donnent le total de 52 attendu. Avec cette opération de mélange à raison d'une opération par minute et en mélangeant huit heures par jour, il vous faudra plus d'un an pour revenir à l'ordre initial.

LA REMISE EN ORDRE CERTAINE

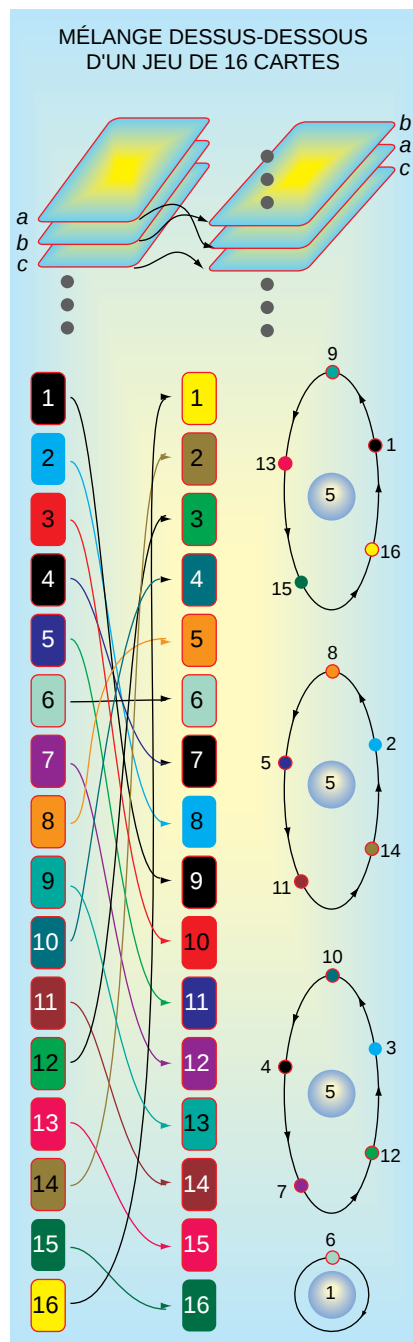
Attention ! Nous n'affirmons pas qu'après avoir appliqué 5 460 fois un mélange dans un jeu de 32 cartes (ou 180 180 fois dans le cas d'un jeu de 52 cartes), nous obtiendrons alors la position de départ : le plus souvent, nous y serons revenus avant et nous n'y serons donc plus nécessairement au coup 5 460 (ou 180 180). Se pose donc la question de savoir s'il existe un nombre n tel que, quelle que soit l'opération de mélange choisie pour un jeu de 32 cartes (ou 52), on soit certain, en l'appliquant n fois exactement, de revenir au point de départ.

La réponse est oui. Ce nombre n est le plus petit commun multiple (encore !) des périodes de toutes les opérations de mélange possibles. Le calcul indique que ce nombre est :

$$2^5 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 = 144\,403\,552\,893\,600.$$

Pour le jeu de 52 cartes, le nombre correspondant est :

$$2^5 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 37 \times 41 \times 43 \times 47 = 3\,099\,044\,504\,245\,996\,706\,400.$$



2. Dans le mélange «dessus-dessous» d'un jeu de 16 cartes, on revient à l'ordre initial après cinq répétitions de l'opération.