

carte passe par les 52 positions possibles dans le jeu quand on effectue 52 fois l'opération. Dans le cas général pour n cartes, la période de la variante du mélange binaire pour n cartes est la période du mélange binaire.

LE MÉLANGE DESSUS-DESSOUS

Il est difficile de connaître *a priori* la période d'une opération de mélange, comme le montre l'exemple suivant, apparemment proche du précédent. Cette opération de mélange est très naturelle, car elle est rapide et ne nécessite pas de table pour poser les cartes ; nous l'appellerons le *mélange dessus-dessous* (on l'appelle parfois mélange de Monge, car Gaspar Monge s'y est intéressé en 1773).

Vous prenez le jeu dans votre main gauche, vous faites passer la première carte (celle au-dessus) dans la main droite, puis la seconde sur la première, puis la troisième sous le paquet de deux cartes que vous avez en main droite, puis la quatrième sur le paquet de trois cartes, etc. Cette fois, avec un jeu de 32 cartes, il faudra réaliser six fois l'opération avant de retrouver le classement initial du paquet. Pour un jeu de 52 cartes, la période est 12. On peut démontrer qu'avec 2^n cartes la période du mélange dessus-dessous est $n + 1$ (à comparer avec le mélange binaire).

Les opérations de mélange que nous avons considérées ont toutes une période relativement petite : on revient rapidement au point de départ. Est-ce toujours le cas ?

Pour connaître la réponse, regardons comment les cartes changent de place dans une opération de mélange. On s'aperçoit (voir les figures 1 et 2) que toute carte suit un cycle : par exemple, la carte en position 2 passe à la place numéro 5, puis à la place numéro 3, puis revient à la place numéro 2. Toute opération de mélange se décompose ainsi en cycles. Si une opération de mélange est composée d'un cycle de longueur 3 pour une carte et d'un autre de longueur 5, alors la période de cette opération est le produit de 3 et 5, c'est-à-dire 15.

Si une opération de mélange est composée de cycles de longueur $n, m, \dots, p$, la période de cette opération est le plus petit commun multiple des entiers $n, m, \dots, p$. S'il y a des cycles de longueur 4, 5 et 6, la période sera 60 (60 est un multiple de 4, de 5 et de 6 ; de tous les multiples communs à 4, 5 et 6, 60 est le plus petit).

Comme chaque carte apparaît dans un cycle et un seul, la somme des longueurs des cycles d'un mélange d'un jeu de 32 cartes est égale à 32 (une carte

qui reste à sa place compte comme un cycle de longueur 1).

Les périodes possibles des opérations de mélange sont donc tous les nombres qui sont plus petit commun multiple d'entiers dont la somme est égale à 32. Puisque $15 + 5 + 5 + 5 + 2 = 32$, et que le plus petit commun multiple de 15, 5, 5, 5, 2 est 30, 30 est une période possible pour une opération de mélange.

Une recherche systématique dans tous les mélanges possibles montre alors que la période la plus grande possible pour un jeu de 32 cartes est

5 460, obtenu comme le produit des nombres 3, 4, 5, 7, 13, dont la somme est 32. Dans toute opération de mélange, on est certain de repasser par l'ordre initial avant le 5 460^e essai.

Existe-t-il des opérations de mélange simples de période 5 460 ? Oui, en voici un exemple : extraire les cartes de rang 1, 8, 13, 17 et 22 du jeu en les plaçant à la fin du jeu à mesure qu'on les enlève (la carte de rang 22 se retrouve donc dernière dans le nouveau paquet). En l'appliquant consciencieusement, vous reviendrez au classement initial au bout de 5 460 étapes, mais pas avant. Sur la figure 6, nous avons indiqué la décomposition en cycles de cette opération de mélange.

Pour le jeu de 52 cartes, la période maximale d'une opération de mélange est 180 180 qui est le produit des nombres 4, 5, 7, 9, 11, 13. Leur somme fait 49, car pour 49, 50, 51 et 52 la période maximale est la même (voir la figure 3). Une opération simple ayant cette période consiste à extraire du jeu les cartes de rang 4, 7, 12, 19, 28, 34 en les plaçant à la fin du jeu au fur et à mesure qu'on les enlève. Dans cette opération, il y a trois cycles de longueur 1 qui, avec les autres cycles, donnent le total de 52 attendu. Avec cette opération de mélange à raison d'une opération par minute et en mélangeant huit heures par jour, il vous faudra plus d'un an pour revenir à l'ordre initial.

LA REMISE EN ORDRE CERTAINE

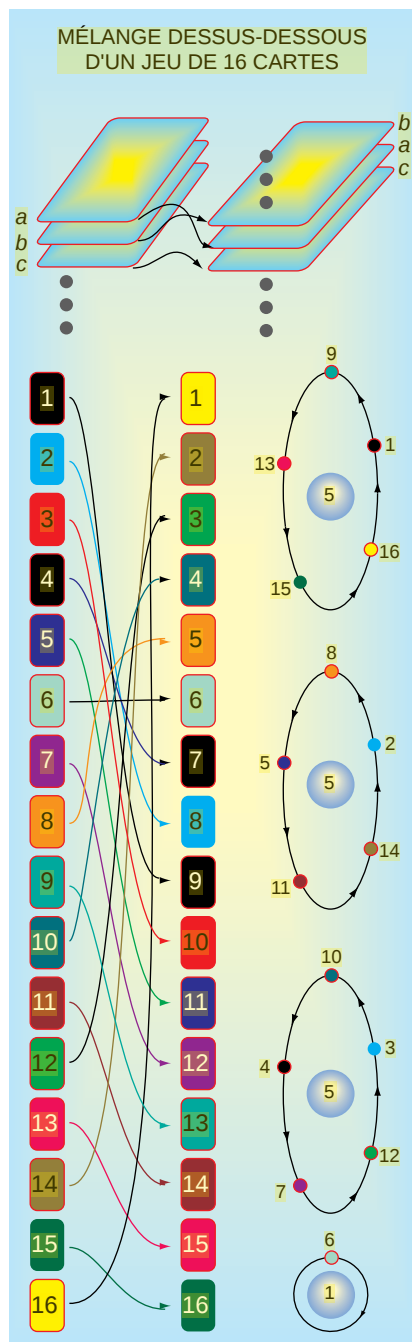
Attention ! Nous n'affirmons pas qu'après avoir appliqué 5 460 fois un mélange dans un jeu de 32 cartes (ou 180 180 fois dans le cas d'un jeu de 52 cartes), nous obtiendrons alors la position de départ : le plus souvent, nous y serons revenus avant et nous n'y serons donc plus nécessairement au coup 5 460 (ou 180 180). Se pose donc la question de savoir s'il existe un nombre n tel que, quelle que soit l'opération de mélange choisie pour un jeu de 32 cartes (ou 52), on soit certain, en l'appliquant n fois exactement, de revenir au point de départ.

La réponse est oui. Ce nombre n est le plus petit commun multiple (encore !) des périodes de toutes les opérations de mélange possibles. Le calcul indique que ce nombre est :

$$2^5 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 = 144\,403\,552\,893\,600.$$

Pour le jeu de 52 cartes, le nombre correspondant est :

$$2^5 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 37 \times 41 \times 43 \times 47 = 3\,099\,044\,504\,245\,996\,706\,400.$$



2. Dans le mélange «dessus-dessous» d'un jeu de 16 cartes, on revient à l'ordre initial après cinq répétitions de l'opération.

TAILLE DU PAQUET	PLUS LONGUE PÉRIODE POSSIBLE	TAILLE DES CYCLES
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5-6	6	2 3
7	12	3 4
8	15	3 5
9	20	4 5
10-11	30	2 3 5
12-13	60	3 4 5
14	84	3 4 7
15	105	3 5 7
16	140	4 5 7
17-18	210	2 3 5 7
19-22	420	3 4 5 7
23-24	840	3 5 7 8
25-26	1260	4 5 7 9
27	1540	4 5 7 11
28	2310	2 3 5 7 11
29	2520	5 7 8 9
30-31	4620	3 4 5 7 11
32-33	5460	3 4 5 7 13
34-35	9240	3 5 7 8 11
36-37	13860	4 5 7 9 11
38-39	16380	4 5 7 9 13
40	27720	5 7 8 9 11
41	30030	2 3 5 7 11 13
42	32760	5 7 8 9 13
43-46	60060	3 4 5 7 11 13
47-48	120120	3 5 7 8 11 13
49-52	180180	4 5 7 9 11 13

3. Périodes maximales possibles en fonction du nombre de cartes. En utilisant un jeu de 52 cartes, par exemple, on sait construire avec les cycles de 3, 5, 7, 9, 11, 13, une opération de mélange du jeu qui ne revient pas à l'ordre initial avant 180 180 coups.

La conclusion de tout cela est que, pour vraiment mélanger un jeu, ce qui est notre but ultime, il faut utiliser plusieurs méthodes différentes. Une seule ne permet jamais d'atteindre plus de 5 460 classements différents, ce qui est très peu en regard des 32! (= 263 130 836 933 693 530 167 218 012 160 000 000) classements possibles différents d'un jeu de 32 cartes (pour 52 cartes, la situation est pire).

Mettre vraiment en désordre un jeu n'est pas possible avec une seule opération de mélange répétée : avec une activité trop organisée, nous ne pourrions jamais atteindre le désordre.

Se pose donc maintenant la question : existe-t-il des ensembles d'opérations de mélange qui donnent n'importe quel classement ? La théorie des groupes propose de répondre oui.

UN ENSEMBLE DE 31 MÉLANGES SUFFISENT

La théorie des mélanges indique une famille de 31 mélanges élémentaires qui permet de tout faire : c'est la famille des 31 *échanges de deux cartes voisines* («échange des cartes 1 et 2», «échange des cartes 2 et 3», etc.). Avec ces 31 opérations de mélanges utilisées soigneusement, on peut tout faire.

Pouvoir tout faire veut dire qu'en appliquant uniquement ce type de mélange

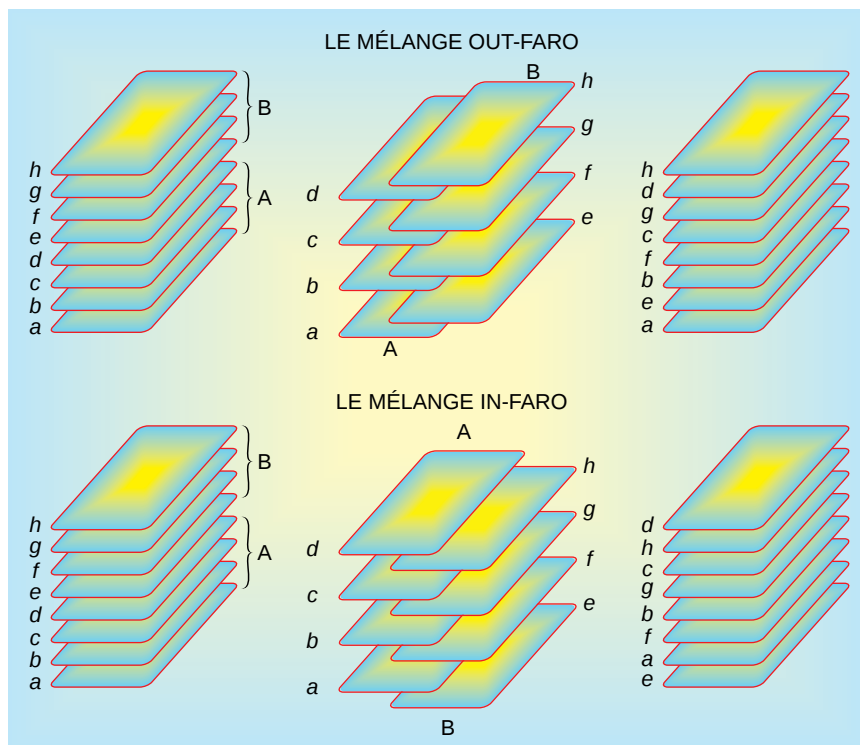
(une opération mélangeant très peu, puisque deux cartes uniquement sont déplacées à chaque fois), on peut passer de n'importe quel classement à n'importe quel autre : ces 31 mélanges constituent un système de générateurs du groupe de tous les mélanges. Bien sûr, ce résultat se généralise aux autres valeurs que 32.

La démonstration de ce résultat tient en quelques lignes. Vous partez d'un certain classement et vous voulez arriver à un autre. Imaginons que la carte qui doit être placée en position 1 soit, au départ, en position 15. Vous la rapprochez petit à petit en l'échangeant avec la carte en position 14 (ce qui consiste à utiliser l'opération de mélange «échange des cartes 14 et 15»), puis avec la carte de position 13, etc. Une fois la première carte en place, vous vous occupez de la seconde, puis de la troisième, etc. Vous obtenez le classement voulu en ayant utilisé au plus $31 + 30 + 29 + \dots + 1 = 496$ opérations de mélanges du type *échange de deux cartes voisines*.

Ce nombre de $31 + 30 + \dots + 1 = 496$ est celui qui vous sera nécessaire par cette méthode pour effectuer l'opération d'inversion du paquet, car, pour amener la dernière carte en position 1, vous devez utiliser 31 échanges ; la dernière carte sera alors celle qu'il faudra mener en position 2, et donc il faudra faire 30 échanges pour la placer, etc.

Une mise en garde doit être formulée. Puisqu'il n'y a que 31 échanges de cartes voisines, si vous en effectuez par exemple 496, vous utilisez plusieurs fois les mêmes échanges ; aussi, en regroupant ces échanges deux à deux, ce qui revient à ne rien faire, vous pourriez diminuer le nombre total d'échanges opérés et passer de 496 à 31 au plus. Votre raisonnement serait juste si le groupe des opérations de mélange était commutatif, ce qui n'est pas le cas : faire A, puis B ne revient pas toujours à faire B, puis A. Cette non-commutativité interdit donc les regroupements envisagés, et l'on démontre qu'ici 496 ne peut être réduit.

Il faut noter que, même si ce résultat indique comment mélanger vraiment des cartes, il ne change rien à la remarque formulée précédemment indiquant que, si on fait quelque chose de trop organisé, on n'obtient jamais de désordre à partir de l'ordre : pour obtenir un mélange d'un paquet de cartes, vous pouvez utiliser des échanges de cartes voisines, mais il faut en prendre un assez grand nombre et les prendre désordonnées pour obtenir un vrai désordre. Pour obtenir du désordre, il faut quelque part l'introduire explicitement : des choses ordonnées combinées



4. Mélange out-faro (en haut) de période 5 et mélange in-faro (en bas) de période 10 (pour un jeu de 32 cartes). Ces types de mélanges, parfois appelés en mitraille, sont utilisés par les joueurs professionnels à des fins que la morale réprouve.