

TAILLE DU PAQUET	PLUS LONGUE PÉRIODE POSSIBLE	TAILLE DES CYCLES
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5-6	6	2 3
7	12	3 4
8	15	3 5
9	20	4 5
10-11	30	2 3 5
12-13	60	3 4 5
14	84	3 4 7
15	105	3 5 7
16	140	4 5 7
17-18	210	2 3 5 7
19-22	420	3 4 5 7
23-24	840	3 5 7 8
25-26	1260	4 5 7 9
27	1540	4 5 7 11
28	2310	2 3 5 7 11
29	2520	5 7 8 9
30-31	4620	3 4 5 7 11
32-33	5460	3 4 5 7 13
34-35	9240	3 5 7 8 11
36-37	13860	4 5 7 9 11
38-39	16380	4 5 7 9 13
40	27720	5 7 8 9 11
41	30030	2 3 5 7 11 13
42	32760	5 7 8 9 13
43-46	60060	3 4 5 7 11 13
47-48	120120	3 5 7 8 11 13
49-52	180180	4 5 7 9 11 13

3. Périodes maximales possibles en fonction du nombre de cartes. En utilisant un jeu de 52 cartes, par exemple, on sait construire avec les cycles de 3, 5, 7, 9, 11, 13, une opération de mélange du jeu qui ne revient pas à l'ordre initial avant 180 180 coups.

La conclusion de tout cela est que, pour vraiment mélanger un jeu, ce qui est notre but ultime, il faut utiliser plusieurs méthodes différentes. Une seule ne permet jamais d'atteindre plus de 5 460 classements différents, ce qui est très peu en regard des 32! (= 263 130 836 933 693 530 167 218 012 160 000 000) classements possibles différents d'un jeu de 32 cartes (pour 52 cartes, la situation est pire).

Mettre vraiment en désordre un jeu n'est pas possible avec une seule opération de mélange répétée : avec une activité trop organisée, nous ne pourrions jamais atteindre le désordre.

Se pose donc maintenant la question : existe-t-il des ensembles d'opérations de mélange qui donnent n'importe quel classement ? La théorie des groupes propose de répondre oui.

UN ENSEMBLE DE 31 MÉLANGES SUFFISENT

La théorie des mélanges indique une famille de 31 mélanges élémentaires qui permet de tout faire : c'est la famille des 31 *échanges de deux cartes voisines* («échange des cartes 1 et 2», «échange des cartes 2 et 3», etc.). Avec ces 31 opérations de mélanges utilisées soigneusement, on peut tout faire.

Pouvoir tout faire veut dire qu'en appliquant uniquement ce type de mélange

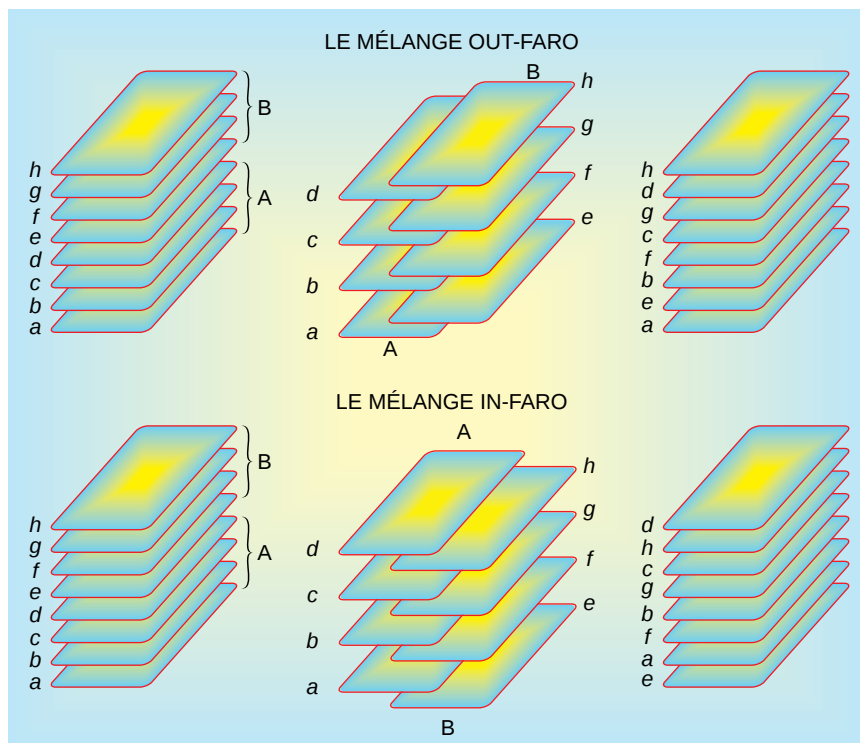
(une opération mélangeant très peu, puisque deux cartes uniquement sont déplacées à chaque fois), on peut passer de n'importe quel classement à n'importe quel autre : ces 31 mélanges constituent un système de générateurs du groupe de tous les mélanges. Bien sûr, ce résultat se généralise aux autres valeurs que 32.

La démonstration de ce résultat tient en quelques lignes. Vous partez d'un certain classement et vous voulez arriver à un autre. Imaginons que la carte qui doit être placée en position 1 soit, au départ, en position 15. Vous la rapprochez petit à petit en l'échangeant avec la carte en position 14 (ce qui consiste à utiliser l'opération de mélange «échange des cartes 14 et 15»), puis avec la carte de position 13, etc. Une fois la première carte en place, vous vous occupez de la seconde, puis de la troisième, etc. Vous obtenez le classement voulu en ayant utilisé au plus $31 + 30 + 29 + \dots + 1 = 496$ opérations de mélanges du type *échange de deux cartes voisines*.

Ce nombre de $31 + 30 + \dots + 1 = 496$ est celui qui vous sera nécessaire par cette méthode pour effectuer l'opération d'inversion du paquet, car, pour amener la dernière carte en position 1, vous devez utiliser 31 échanges ; la dernière carte sera alors celle qu'il faudra mener en position 2, et donc il faudra faire 30 échanges pour la placer, etc.

Une mise en garde doit être formulée. Puisqu'il n'y a que 31 échanges de cartes voisines, si vous en effectuez par exemple 496, vous utilisez plusieurs fois les mêmes échanges ; aussi, en regroupant ces échanges deux à deux, ce qui revient à ne rien faire, vous pourriez diminuer le nombre total d'échanges opérés et passer de 496 à 31 au plus. Votre raisonnement serait juste si le groupe des opérations de mélange était commutatif, ce qui n'est pas le cas : faire A, puis B ne revient pas toujours à faire B, puis A. Cette non-commutativité interdit donc les regroupements envisagés, et l'on démontre qu'ici 496 ne peut être réduit.

Il faut noter que, même si ce résultat indique comment mélanger vraiment des cartes, il ne change rien à la remarque formulée précédemment indiquant que, si on fait quelque chose de trop organisé, on n'obtient jamais de désordre à partir de l'ordre : pour obtenir un mélange d'un paquet de cartes, vous pouvez utiliser des échanges de cartes voisines, mais il faut en prendre un assez grand nombre et les prendre désordonnées pour obtenir un vrai désordre. Pour obtenir du désordre, il faut quelque part l'introduire explicitement : des choses ordonnées combinées



4. Mélange out-faro (en haut) de période 5 et mélange in-faro (en bas) de période 10 (pour un jeu de 32 cartes). Ces types de mélanges, parfois appelés en mitraille, sont utilisés par les joueurs professionnels à des fins que la morale réprouve.