

TAILLE DU PAQUET	PLUS LONGUE PÉRIODE POSSIBLE	TAILLE DES CYCLES
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5-6	6	2 3
7	12	3 4
8	15	3 5
9	20	4 5
10-11	30	2 3 5
12-13	60	3 4 5
14	84	3 4 7
15	105	3 5 7
16	140	4 5 7
17-18	210	2 3 5 7
19-22	420	3 4 5 7
23-24	840	3 5 7 8
25-26	1260	4 5 7 9
27	1540	4 5 7 11
28	2310	2 3 5 7 11
29	2520	5 7 8 9
30-31	4620	3 4 5 7 11
32-33	5460	3 4 5 7 13
34-35	9240	3 5 7 8 11
36-37	13860	4 5 7 9 11
38-39	16380	4 5 7 9 13
40	27720	5 7 8 9 11
41	30030	2 3 5 7 11 13
42	32760	5 7 8 9 13
43-46	60060	3 4 5 7 11 13
47-48	120120	3 5 7 8 11 13
49-52	180180	4 5 7 9 11 13

3. Périodes maximales possibles en fonction du nombre de cartes. En utilisant un jeu de 52 cartes, par exemple, on sait construire avec les cycles de 3, 5, 7, 9, 11, 13, une opération de mélange du jeu qui ne revient pas à l'ordre initial avant 180 180 coups.

La conclusion de tout cela est que, pour vraiment mélanger un jeu, ce qui est notre but ultime, il faut utiliser plusieurs méthodes différentes. Une seule ne permet jamais d'atteindre plus de 5 460 classements différents, ce qui est très peu en regard des 32! (= 263 130 836 933 693 530 167 218 012 160 000 000) classements possibles différents d'un jeu de 32 cartes (pour 52 cartes, la situation est pire).

Mettre vraiment en désordre un jeu n'est pas possible avec une seule opération de mélange répétée : avec une activité trop organisée, nous ne pourrions jamais atteindre le désordre.

Se pose donc maintenant la question : existe-t-il des ensembles d'opérations de mélange qui donnent n'importe quel classement ? La théorie des groupes propose de répondre oui.

UN ENSEMBLE DE 31 MÉLANGES SUFFISENT

La théorie des mélanges indique une famille de 31 mélanges élémentaires qui permet de tout faire : c'est la famille des 31 *échanges de deux cartes voisines* («échange des cartes 1 et 2», «échange des cartes 2 et 3», etc.). Avec ces 31 opérations de mélanges utilisées soigneusement, on peut tout faire.

Pouvoir tout faire veut dire qu'en appliquant uniquement ce type de mélange

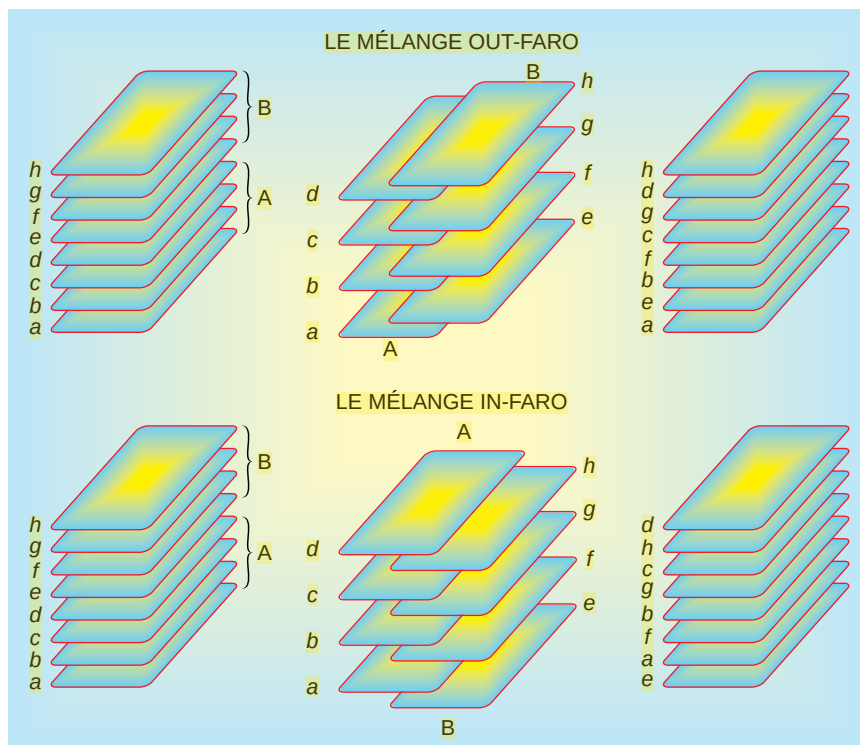
(une opération mélangeant très peu, puisque deux cartes uniquement sont déplacées à chaque fois), on peut passer de n'importe quel classement à n'importe quel autre : ces 31 mélanges constituent un système de générateurs du groupe de tous les mélanges. Bien sûr, ce résultat se généralise aux autres valeurs que 32.

La démonstration de ce résultat tient en quelques lignes. Vous partez d'un certain classement et vous voulez arriver à un autre. Imaginons que la carte qui doit être placée en position 1 soit, au départ, en position 15. Vous la rapprochez petit à petit en l'échangeant avec la carte en position 14 (ce qui consiste à utiliser l'opération de mélange «échange des cartes 14 et 15»), puis avec la carte de position 13, etc. Une fois la première carte en place, vous vous occupez de la seconde, puis de la troisième, etc. Vous obtenez le classement voulu en ayant utilisé au plus $31 + 30 + 29 + \dots + 1 = 496$ opérations de mélanges du type *échange de deux cartes voisines*.

Ce nombre de $31 + 30 + \dots + 1 = 496$ est celui qui vous sera nécessaire par cette méthode pour effectuer l'opération d'inversion du paquet, car, pour amener la dernière carte en position 1, vous devez utiliser 31 échanges ; la dernière carte sera alors celle qu'il faudra mener en position 2, et donc il faudra faire 30 échanges pour la placer, etc.

Une mise en garde doit être formulée. Puisqu'il n'y a que 31 échanges de cartes voisines, si vous en effectuez par exemple 496, vous utilisez plusieurs fois les mêmes échanges ; aussi, en regroupant ces échanges deux à deux, ce qui revient à ne rien faire, vous pourriez diminuer le nombre total d'échanges opérés et passer de 496 à 31 au plus. Votre raisonnement serait juste si le groupe des opérations de mélange était commutatif, ce qui n'est pas le cas : faire A, puis B ne revient pas toujours à faire B, puis A. Cette non-commutativité interdit donc les regroupements envisagés, et l'on démontre qu'ici 496 ne peut être réduit.

Il faut noter que, même si ce résultat indique comment mélanger vraiment des cartes, il ne change rien à la remarque formulée précédemment indiquant que, si on fait quelque chose de trop organisé, on n'obtient jamais de désordre à partir de l'ordre : pour obtenir un mélange d'un paquet de cartes, vous pouvez utiliser des échanges de cartes voisines, mais il faut en prendre un assez grand nombre et les prendre désordonnées pour obtenir un vrai désordre. Pour obtenir du désordre, il faut quelque part l'introduire explicitement : des choses ordonnées combinées



4. Mélange out-faro (en haut) de période 5 et mélange in-faro (en bas) de période 10 (pour un jeu de 32 cartes). Ces types de mélanges, parfois appelés en mitraille, sont utilisés par les joueurs professionnels à des fins que la morale réprouve.

entre elles de façon ordonnée ne peuvent pas produire rapidement un vrai désordre. Ce principe général constaté ici ne doit pas surprendre, car il admet des versions mathématisées. On les démontre en utilisant la théorie de la complexité algorithmique (qui est la théorie fondée sur l'idée que les objets aléatoires sont ceux dont on ne peut pas donner de description courte).

LE MÉLANGE PHARAON

Les tricheurs professionnels et les prestidigitateurs utilisent une opération de mélange qui ne peut être réussie qu'après un long entraînement et avec un jeu en bon état : le *mélange pharaon* ou *mélange parfait*. Il consiste à insérer l'une dans l'autre les deux moitiés d'un jeu coupé en deux. Ce mélange ressemble au *mélange en mitraille* qui, entre des mains non expertes, constitue effectivement une bonne méthode de mélange, car on n'effectue pas la même opération à chaque fois : on ne coupe pas au même endroit et on insère les deux moitiés irrégulièrement (par exemple deux cartes du tas de droite, puis trois du tas de gauche, puis une du tas de droite etc.). Des études mathématiques établissent que, pour bien mélanger un jeu de 52 cartes par le *mélange en mitraille*, il faut l'effectuer six ou sept fois au moins.

Le cartomane bien entraîné, lui, réussit d'abord à séparer le paquet exactement en son milieu, puis à insérer l'une dans l'autre de manière parfaite les deux moitiés du jeu : les cartes des demi-paquets de droite et de gauche alternent donc régulièrement. Comme on ne soupçonne pas que cette perfection soit possible, le procédé est très efficace pour tricher.

Il existe deux versions du *mélange pharaon*, celle où l'alternance obtenue préserve la carte du dessus – appelée *out-faro* – et celle où la carte de dessus est passée seconde (c'est donc la première carte de la moitié du dessous qui se retrouve en première position après l'opération de mélange), appelée cette fois *in-faro* (voir la figure 4).

Le *out-faro* est l'opération inverse de l'opération considérée tout à l'heure (appelée mélange binaire) : si vous effectuez l'une, puis l'autre, vous revenez au paquet initial. Il en résulte que le *out-faro*, pour un jeu de 32 cartes, a une période de 5, et une période de 8 pour un jeu de 52 cartes (une opération a toujours la même période que son opération inverse). On en déduit aussi qu'avec un jeu de 32 cartes, quatre *out-faro* équivalent à un mélange binaire, et quatre mélanges binaires donnent un *out-faro*.

ALGÈBRE DU JEU DE 32 CARTES

MÉLANGE BINAIRE : MB ;
OUT-FARO : OF ; IN FARO : IF

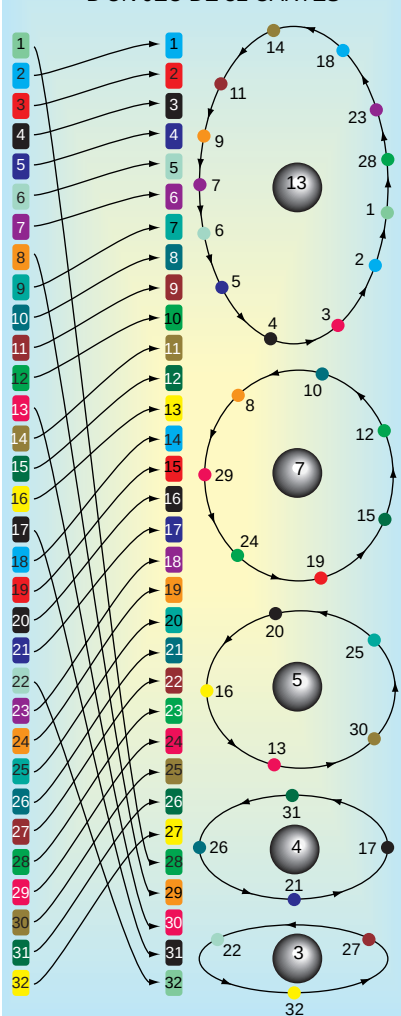
(MB puis MB puis MB puis MB puis MB) = RIEN
(OF puis OF puis OF puis OF puis OF) = RIEN
(IF puis IF puis IF puis IF puis IF) = INVERSION
(INVERSION puis INVERSION) = RIEN
(OF puis MB) = (MB puis OF) = RIEN
(MB puis MB) = (OF puis OF puis OF)

Pour amener la carte du dessus en position numéro 13 (on numérote à partir de zéro : on décompose 13 en base 2 : $13 = 1101$, on fait successivement :

IF puis IF puis OF puis IF
1 1 0 1

5. Les opérations de mélange se combinent selon une algèbre dont nous avons écrit quelques règles. RIEN est l'élément neutre, l'inversion est une racine carrée de RIEN, OF une racine cinquième, IF une racine dixième.

MÉLANGE DE PLUS GRANDE PÉRIODE D'UN JEU DE 32 CARTES



6. Avec un jeu de 32 cartes, le mélange de plus longue période consiste à extraire successivement les cartes de rang 1, 8, 13, 17, 22 et à les placer en dessous. Ce mélange est de période $13 \times 7 \times 5 \times 4 \times 3 = 5\,460$.

Vous le soupçonniez sans doute, l'opération inverse du *in-faro* est la variante du mélange binaire. La période du *in-faro* est donc de 10 pour 32 cartes et de 52 pour 52 cartes, ce que l'on peut constater directement en effectuant les manipulations.

Voici une façon de tricher en utilisant le *out-faro*. Imaginons que vous jouiez à quatre à un jeu où, en utilisant les 52 cartes, on commence par les distribuer toutes par la méthode habituelle (une par une en tournant), ce qui donne 13 cartes pour le joueur à ma gauche A, puis son voisin B, puis son voisin C et enfin moi. En ramassant les cartes, vous préparez discrètement le jeu en mettant, à partir du haut du paquet, les 13 cartes que vous voulez donner au joueur A, suivies des 13 que vous voulez pour B, suivies des 13 pour C et enfin de celles que vous voulez pour vous. Vous pouvez aussi vous contenter de regarder les cartes et d'en retenir certaines, ce qui vous donnera un avantage sérieux. Vous battez deux fois les cartes en utilisant le *out-faro*, et vous distribuez les cartes. Elles seront exactement comme vous le vouliez, car la distribution en quatre, carte par carte, équivaut à deux mélanges binaires que les deux *out-faro* ont par avance annulés. Souvent on doit faire couper le jeu par son voisin avant de distribuer, mais on peut oublier ou utiliser une méthode de *fausses coupes* ou encore *forcer la coupe* là où cela arrange.

Les deux opérations de *out-faro* et de *in-faro* ne constituent pas un système de générateurs, comme les 31 opérations de mélange vues tout à l'heure. En revanche, à elles seules, elles permettent de déplacer la carte du dessus à l'emplacement qu'on veut dans le jeu selon la méthode suivante due à Alex Emsley : pour amener la carte du dessus en position k dans un jeu de $2m$ cartes dont on numérote toutes les positions de 0 jusqu'à $2m - 1$, on décompose k en base 2 (par exemple, $6 = 110$), on interprète les «1» comme «in» et les «0» comme «out», et l'on effectue, de la gauche vers la droite, les opérations de *in-faro* et de *out-faro* correspondantes (pour notre exemple donc : *in-faro*, *in-faro*, *out-faro*). On imagine le parti qu'on peut tirer de ce résultat pour tricher ou faire des tours de prestidigitation.

UN MÉLANGE AVEC DÉCOUPE

Alors que les mélanges que nous avons évoqués traitent tous de cartes qu'on garde entières, voici maintenant un tour amusant qu'on réalise en mélangeant des