

entre elles de façon ordonnée ne peuvent pas produire rapidement un vrai désordre. Ce principe général constaté ici ne doit pas surprendre, car il admet des versions mathématisées. On les démontre en utilisant la théorie de la complexité algorithmique (qui est la théorie fondée sur l'idée que les objets aléatoires sont ceux dont on ne peut pas donner de description courte).

LE MÉLANGE PHARAON

Les tricheurs professionnels et les prestidigitateurs utilisent une opération de mélange qui ne peut être réussie qu'après un long entraînement et avec un jeu en bon état : le *mélange pharaon* ou *mélange parfait*. Il consiste à insérer l'une dans l'autre les deux moitiés d'un jeu coupé en deux. Ce mélange ressemble au *mélange en mitraille* qui, entre des mains non expertes, constitue effectivement une bonne méthode de mélange, car on n'effectue pas la même opération à chaque fois : on ne coupe pas au même endroit et on insère les deux moitiés irrégulièrement (par exemple deux cartes du tas de droite, puis trois du tas de gauche, puis une du tas de droite etc.). Des études mathématiques établissent que, pour bien mélanger un jeu de 52 cartes par le *mélange en mitraille*, il faut l'effectuer six ou sept fois au moins.

Le cartomane bien entraîné, lui, réussit d'abord à séparer le paquet exactement en son milieu, puis à insérer l'une dans l'autre de manière parfaite les deux moitiés du jeu : les cartes des demi-paquets de droite et de gauche alternent donc régulièrement. Comme on ne soupçonne pas que cette perfection soit possible, le procédé est très efficace pour tricher.

Il existe deux versions du *mélange pharaon*, celle où l'alternance obtenue préserve la carte du dessus – appelée *out-faro* – et celle où la carte de dessus est passée seconde (c'est donc la première carte de la moitié du dessous qui se retrouve en première position après l'opération de mélange), appelée cette fois *in-faro* (voir la figure 4).

Le *out-faro* est l'opération inverse de l'opération considérée tout à l'heure (appelée mélange binaire) : si vous effectuez l'une, puis l'autre, vous revenez au paquet initial. Il en résulte que le *out-faro*, pour un jeu de 32 cartes, a une période de 5, et une période de 8 pour un jeu de 52 cartes (une opération a toujours la même période que son opération inverse). On en déduit aussi qu'avec un jeu de 32 cartes, quatre *out-faro* équivalent à un mélange binaire, et quatre mélanges binaires donnent un *out-faro*.

ALGÈBRE DU JEU DE 32 CARTES

MÉLANGE BINAIRE : MB ;
OUT-FARO : OF ; IN FARO : IF

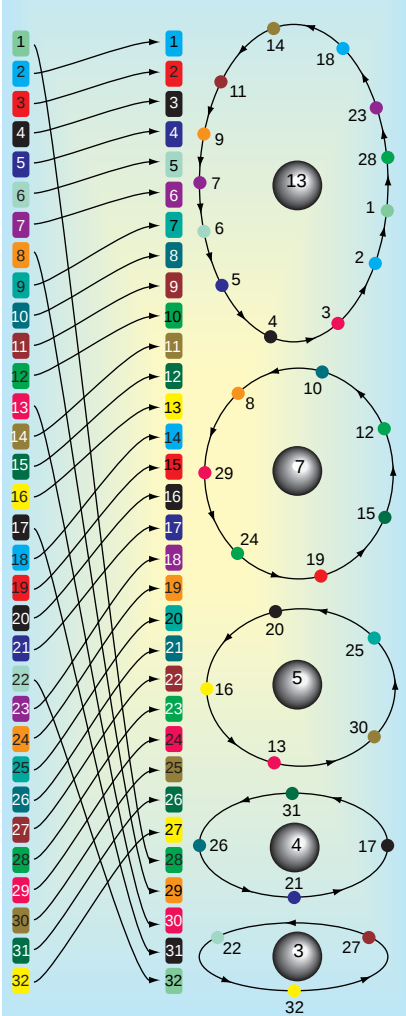
(MB puis MB puis MB puis MB puis MB) = RIEN
(OF puis OF puis OF puis OF puis OF) = RIEN
(IF puis IF puis IF puis IF puis IF) = INVERSION
(INVERSION puis INVERSION) = RIEN
(OF puis MB) = (MB puis OF) = RIEN
(MB puis MB) = (OF puis OF puis OF)

Pour amener la carte du dessus en position numéro 13 (on numérote à partir de zéro : on décompose 13 en base 2 : $13 = 1101$, on fait successivement :

IF puis IF puis OF puis IF
1 1 0 1

5. Les opérations de mélange se combinent selon une algèbre dont nous avons écrit quelques règles. RIEN est l'élément neutre, l'inversion est une racine carrée de RIEN, OF une racine cinquième, IF une racine dixième.

MÉLANGE DE PLUS GRANDE PÉRIODE D'UN JEU DE 32 CARTES



6. Avec un jeu de 32 cartes, le mélange de plus longue période consiste à extraire successivement les cartes de rang 1, 8, 13, 17, 22 et à les placer en dessous. Ce mélange est de période $13 \times 7 \times 5 \times 4 \times 3 = 5\,460$.

Vous le soupçonniez sans doute, l'opération inverse du *in-faro* est la variante du mélange binaire. La période du *in-faro* est donc de 10 pour 32 cartes et de 52 pour 52 cartes, ce que l'on peut constater directement en effectuant les manipulations.

Voici une façon de tricher en utilisant le *out-faro*. Imaginons que vous jouiez à quatre à un jeu où, en utilisant les 52 cartes, on commence par les distribuer toutes par la méthode habituelle (une par une en tournant), ce qui donne 13 cartes pour le joueur à ma gauche A, puis son voisin B, puis son voisin C et enfin moi. En ramassant les cartes, vous préparez discrètement le jeu en mettant, à partir du haut du paquet, les 13 cartes que vous voulez donner au joueur A, suivies des 13 que vous voulez pour B, suivies des 13 pour C et enfin de celles que vous voulez pour vous. Vous pouvez aussi vous contenter de regarder les cartes et d'en retenir certaines, ce qui vous donnera un avantage sérieux. Vous battez deux fois les cartes en utilisant le *out-faro*, et vous distribuez les cartes. Elles seront exactement comme vous le vouliez, car la distribution en quatre, carte par carte, équivaut à deux mélanges binaires que les deux *out-faro* ont par avance annulés. Souvent on doit faire couper le jeu par son voisin avant de distribuer, mais on peut oublier ou utiliser une méthode de *fausses coupes* ou encore *forcer la coupe* là où cela arrange.

Les deux opérations de *out-faro* et de *in-faro* ne constituent pas un système de générateurs, comme les 31 opérations de mélange vues tout à l'heure. En revanche, à elles seules, elles permettent de déplacer la carte du dessus à l'emplacement qu'on veut dans le jeu selon la méthode suivante due à Alex Emsley : pour amener la carte du dessus en position k dans un jeu de $2m$ cartes dont on numérote toutes les positions de 0 jusqu'à $2m - 1$, on décompose k en base 2 (par exemple, $6 = 110$), on interprète les «1» comme «in» et les «0» comme «out», et l'on effectue, de la gauche vers la droite, les opérations de *in-faro* et de *out-faro* correspondantes (pour notre exemple donc : *in-faro*, *in-faro*, *out-faro*). On imagine le parti qu'on peut tirer de ce résultat pour tricher ou faire des tours de prestidigitation.

UN MÉLANGE AVEC DÉCOUPE

Alors que les mélanges que nous avons évoqués traitent tous de cartes qu'on garde entières, voici maintenant un tour amusant qu'on réalise en mélangeant des

cartes que l'on découpe. Ce tour peut être réalisé avec toutes sortes d'objets identiques (même tridimensionnels), à condition d'avoir un outil pour les découper en tranches : des statuettes identiques avec une bonne scie conviendraient.

Prenez entre 5 et 10 cartes identiques (ou des photos, etc.). Pour un tour en public, il faut utiliser de grandes cartes de 20 centimètres de haut, par exemple.

Formez une file avec les cartes en prenant soin de mettre toutes les cartes dans le même sens (si elles possèdent un haut et un bas).

Demandez à un spectateur de découper chacune des cartes en tranches (de

deux à cinq pour chaque carte) à l'aide de coups de ciseaux horizontaux. À chaque fois qu'il découpe une carte, il en remet les tranches dans l'ordre dans la file. Vous lui demandez ensuite de mélanger les tranches en opérant de la manière suivante : il prend alternativement une tranche en haut de la file et une tranche en bas et recompose ainsi, à côté de la première, une nouvelle file de tranches de cartes. Cette file est doublement mélangée, puis qu'il a choisi lui-même les découpes et qu'il a fait alterner des bouts provenant du haut avec d'autres provenant du bas.

Vous annoncez alors que, grâce à la puissance persuasive de votre pensée,

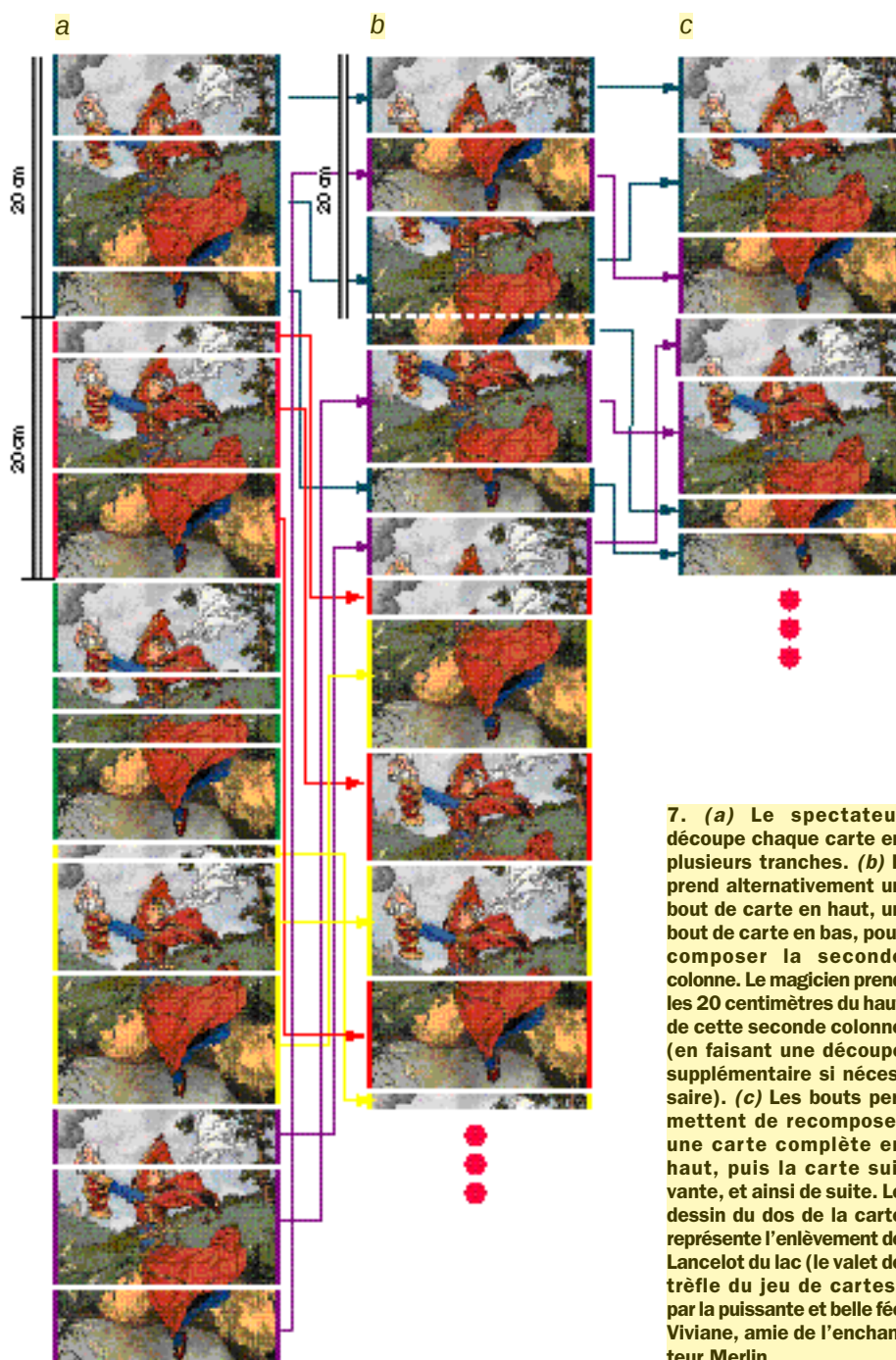
vous avez forcé le spectateur à découper soigneusement les cartes en des endroits précis et à les mélanger d'une telle façon que les morceaux se recomposent en cartes complètes.

Vous prenez une règle (ou un objet pouvant vous indiquer la hauteur d'une carte), vous mesurez 20 centimètres de la file en haut et, en effectuant une découpe de plus si nécessaire, vous prenez cette longueur de 20 centimètres de la file de tranches de cartes (qui sera constituée de deux à six tranches de cartes venant de cartes différentes).

Miracle ! Quand vous les disposez sur la table, elles se complètent exactement pour former une carte entière. L'effet est maximal si un dessin figure sur la carte, comme un personnage debout ou un paysage. Vous pouvez poursuivre plusieurs fois en prenant 20 centimètres de tranches en haut de la file restante ; à chaque fois, les bouts se recomposent exactement pour former une carte entière (voir la figure 7).

Ce tour ne demande aucun trucage ni aucune manipulation (physique ou mentale !), car il est basé sur un principe mathématique qui assure qu'il marchera à chaque fois. Ce principe est la version généralisée aux variables continues du principe de Gilbreath, principe que nous avons déjà traité (voir *Pour la Science*, mai 1996) et dont la démonstration alors indiquée s'adapte facilement.

Là encore, bien que l'insertion entre les tranches venant du haut de la file et celles venant du bas de la file apparaisse aléatoire (le spectateur ayant lui-même choisi la taille et le nombre des tranches) elle ne l'était qu'en apparence : l'opération de mélange ne mélange pas.



7. (a) Le spectateur découpe chaque carte en plusieurs tranches. (b) Il prend alternativement un bout de carte en haut, un bout de carte en bas, pour composer la seconde colonne. Le magicien prend les 20 centimètres du haut de cette seconde colonne (en faisant une découpe supplémentaire si nécessaire). (c) Les bouts permettent de recomposer une carte complète en haut, puis la carte suivante, et ainsi de suite. Le dessin du dos de la carte représente l'enlèvement de Lancelot du lac (le valet de trèfle du jeu de cartes) par la puissante et belle fée Viviane, amie de l'enchantement Merlin.

Jean-Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.
e-mail : delahaye@lil.fr

J. BEASLEY, *The Mathematics of Games*, Oxford University Press, Oxford, 1989.

J.-P. DELAHAYE, *Jeu avec des cartes bifaces*, in *Pour la Science*, mai 1996.

J. HUGARD et F. BRAUE, *Expert Card Technique : Close-Up Table Magic*, Dover Publication, New York, 1974.

R. VOLMER, *Les trésors du pharaon*, éditions du spectacle, 6 rue de la Klebsau, 67100 Strasbourg, 1988.

R. VOLMER, *Le principe de Gilbreath*, éditions du spectacle, 1991.

P. DIACONIS, R.L. GRAHAM et W.M. KANTOR, *The Mathematics of Perfects Shuffles*, in *Advances in Applied Mathematics*, 4, 1983, pp. 175-196.

J. CONWAY et R. GUY, *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, New York, 1996.