

Les inattendus des fractales

BENOIT MANDELBROT

Les «pathologies mathématiques» de 1900 ont conduit à une description de la rugosité, avant d'être retrouvées dans des motifs décoratifs anciens.

Pour le philosophe, une découverte scientifique a d'autant plus de valeur qu'elle dérange. Les inattendus de la science révèlent à la fois l'infinie complexité du réel et les limitations dans le nombre et l'efficacité des outils. À la surprise du jeune que j'étais, mon mentor John von Neumann pensait que la science ne pouvait éviter d'être «opportuniste.» Pour s'atteler à une tâche, il faut se vider l'esprit de tout ce qui est ressenti comme «périphérique», ou comme trop ou pas assez ambitieux. Le péril n'est jamais évité et des œillères d'abord fructueuses finissent par se formaliser, devenant des barrières que l'on croit intrinsèques et permanentes. Certaines s'érigent en murailles entre disciplines-forteresse, finissant toujours par freiner le progrès.

Rappelons qu'une fractale est un objet tel que chacun de ses morceaux reproduit, en plus petit, la structure du tout. La géométrie fractale n'est plus le fruit d'un seul homme, mais cet article se limite à des développements dont j'ai été l'agent principal.

Les mathématiciens des années 1900 avaient identifié des «monstres» qui, pour citer Freeman Dyson, «étaient considérés comme importants parce qu'ils démontraient que le monde des mathématiques pures inclut une richesse de possibilités allant bien au-delà des structures simples qu'ils voyaient dans la nature. Les mathématiques du xx^e siècle fleurirent dans la croyance qu'elles étaient allées complètement au-delà des limitations que leur avaient imposées leur origine dans les sciences de la nature [mais la géométrie fractale montra] que la nature a fait la nique aux mathématiciens. Ceux du xix^e siècle avaient manqué d'imagination, mais pas la nature. Les exemples pathologiques que les mathématiciens avaient inventés pour se libérer du naturalisme du xix^e siècle se révèlent désormais être inhérents à des objets familiers

qui nous entourent. Nous n'avons pas à aller loin pour les chercher : les monstres de Lebesgue-Osgood sont la substance même de notre chair».

Ces derniers mots font écho à une idée que j'avais avancée, que lesdits monstres ne sont autres qu'un schéma de notre vascularisation.

Dans le même style, je notai en 1977 que «la chronique des sciences regorge d'histoires de sorciers et de contes de fées. Un sorcier crée un monstre, non par besoin ni par malice, mais simplement pour se prouver, ainsi qu'à ses émules, que la bête n'était point inconcevable. Le monstre lâché, les paysans lui refusent l'entrée de leurs villages, car ses traits les effraient autant qu'ils forcent leur incrédulité. Puis, un jour, une fée leur dessille les yeux : le monstre est honnête homme et tout prêt à les servir. On s'y habitue et l'on finit même par le trouver beau.

«Les villages auxquels je pense sont des disciplines scientifiques, et nos sorciers sont bien entendu des mathématiciens. Il semble féérique, et presque miraculeux – cette apparition récurrente étant chaque fois inattendue – que des mathématiques qui sont en apparence parmi les plus contre-intuitives se révèlent si souvent indispensables pour appréhender le réel ambiant. Nos grands sorciers, dont certains voient les monstres qu'ils ont créés se transformer ainsi sous leurs yeux, ne seraient que des apprentis.

«Comme les autres histoires de sorciers et de fées, celles qui adviennent aux sciences en disent sûrement beaucoup sur la nature profonde de la pensée et de la sensibilité humaine.» Le dernier alinéa de cette citation reste d'actualité, mais – inattendu nouveau – j'ai conçu des doutes sur la créativité *ab nihilo* des dits sorciers. D'innombrables lettres de lecteurs me firent vite conclure que la grande aventure que je vivais n'avait pas commencé vers 1875, mais remontait dans

la nuit des temps. Il avait paru inattendu que la géométrie fractale nous offre, entre autres cadeaux, une forme nouvelle d'art ou, tout au moins, de décoration, mais je crois maintenant que c'était tout naturel : avant d'être associées à l'austérité mathématique de 1900, les fractales existaient déjà et paraient l'art ou la décoration d'innombrables cultures de tous les continents.

Se pourrait-il même que la phrase «au commencement était le verbe» doive devenir «au commencement était l'image»? Je vois de plus en plus de fractales dans des œuvres d'art. Pour ne donner que deux exemples relatifs aux débuts de la peinture abstraite, Frantisek Kupka et Augusto Giacometti avaient pour ambition de chasser le représentatif et de ne conserver que quelque chose de sous-jacent et de plus essentiel. Or ce qu'ils conservaient, et qui anticipait souvent les mathématiques, était fractal. Bien sûr, ce n'est pas en ces termes qu'ils pouvaient le voir, puisque, avant la géométrie fractale, aucun langage n'existait pour l'exprimer.

Dans un autre ordre d'idées, des exemples de ces courbes que j'avais qualifiées de Sierpinski (voir la figure 3) abondent dans les pavements et plafonds des églises italiennes ou dans les mandalas tibétains. On trouve la régression auto-similaire qui régit les fractales, parfaitement formée, dans les traités bouddhistes zen, chez Leibniz... J'en passe.

Somme toute, pour amplifier la remarque de F. Dyson, les fractales nous montreraient plutôt que la Nature s'associe à l'art pour faire la nique à tous ceux qui se complaisent à subdiviser le domaine du savoir et du sentir en forteresses voisines, séparées et hostiles.

Il était inattendu que des dessins «réalistes» de montagnes et de nuages puissent s'obtenir au moyen de formules mathématiques et que ces formules soient extrêmement simples.

Goethe notait que «Grise, mon ami, est toute théorie, et vert l'arbre doré de la vie,» et maints poètes et philosophes nous rappellent que le pouvoir de la raison est sévèrement limité. En particulier, il était présumé que la géométrie, inéluctablement sèche et dure, devait le devenir de plus en plus. Elle pouvait fort bien représenter l'artificiel et le technique, mais décrire la richesse exubérante et «organique» de la nature était au-delà de tout ce qu'on pouvait en espérer.

L'inattendu se révéla par des images fractales qui, tout en étant totalement «artificielles» et «techniques,» ressemblent à s'y tromper à des montagnes ou à des nuages. Elles constituent un des piliers de la nature et le fondement d'une nouvelle géométrie, ce qui explique avec

quelle chaleur elles ont été accueillies par un vaste public et comment elles ont permis une quantification et un contrôle de formes qui deviennent un nouvel outil précieux pour les spécialistes de géomorphologie.

Historiquement, les images fractales n'ont pas été un corollaire de l'arrivée de l'ordinateur, mais un moteur de l'infographie. Impossible d'oublier les nuits blanches passées à produire nos premières images avec des programmes conçus pour de tout autres buts et que personne ne savait ou n'osait modifier. Prenez l'étude des côtes : tous les 64 octets, la machine s'arrêtait et, pour la faire repartir, il fallait frapper «retour.» Au matin, nous avions en main, sur une feuille tapée à la machine, une «courbe,» faite de X, O, M et W superposés. Soulagement, cette courbe esquissait la côte de la Nouvelle-Zélande ; au large (en prime) une île Bounty. L'intérieur de la côte fut rempli d'encre avant d'être publié.

Pour obtenir nos reliefs fractals, nous avons dû attendre que les résultats d'un calcul s'affichent sur un tube cathodique de laboratoire. Reprise des veillées et grande déception : les images ne nous parlaient pas. L'addition d'un plan de référence, cependant, suscita un nouvel inattendu : un semis d'îlots apparaissait au bout d'une fine péninsule, et une mer miroitait à l'horizon, film de voyage revu en rêve. L'arrivée d'une plus haute fidélité et de la couleur nous remit au travail, plein de craintes. Notre belle trouvaille se révélerait-elle le fruit d'une imagination trop fébrile, qui aurait interprété à son gré un dessin ambigu ? Inattendu et soulagement : il n'en fut rien.

UN ART QUANTITATIF ?

Il était inattendu que l'image puisse redevenir une source féconde de conjectures mathématiques aussi simples d'apparence qu'attrayantes par leur difficulté.

La preuve est au centre des mathématiques ; elles peuvent vivre pendant de longues périodes sans apport extérieur, mais, en agissant ainsi, elles se mutilent sévèrement et sans raison.

Examinons le concept de «géométrie.» Il réussissait, autrefois, à combiner la raison avec la contemplation d'images. Mais celles-ci étaient obtenues à la main ou avec des outils peu sujets au progrès, et tout le monde avait conclu vers 1950 que l'aspect visuel de la géométrie était mort, ou tout au moins à jamais stérilisé, son apport possible étant épuisé. Les mathématiques semblaient donc se diriger de façon inéluctable vers une abstraction toujours croissante.



1. Un paysage fractal.

Jeune amoureux des images géométriques, j'osais à peine espérer que ce n'était qu'une éclipse plutôt que la mort, que ce dogme philosophique ne faisait qu'extrapoler les limitations d'une technique. Cependant, c'est seulement quand j'ai contribué à faire de l'ordinateur une machine à dessiner que l'image a pu de nouveau imposer sa puissance de révélateur de faits géométriques, donc de conjectures appelant la démonstration.

Voici d'abord un exemple peu connu : définissons un amas brownien dans le plan comme la trajectoire d'un mouvement brownien entre deux retours à un point double. L'intérieur une fois noirci, le tout ne manque pas d'évoquer une île dont la côte est encore plus tortueuse que celle de la Bretagne. Mon expérience suggérerait un contour de dimension fractale égale à $4/3$. Le calcul numérique le confirmait et la saine curiosité exigeait une démonstration. Les experts se sont affairés, mais la question reste ouverte. Jamais elle n'aurait été posée sans image.

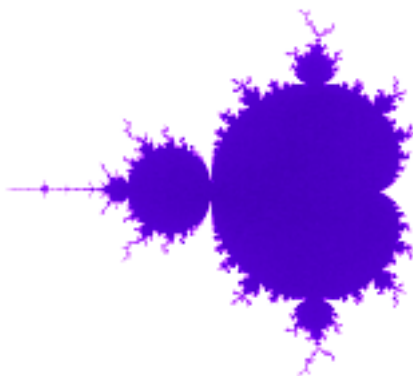
Mes conjectures les plus célèbres sont relatives à l'ensemble de Mandelbrot (voir la figure 2), que j'ai sans doute été le premier à voir, et sans conteste le premier à reconnaître et à examiner, avec le respect, le soin et la prudence que l'image mérite. Reprise des veillées qui avaient donné nos reliefs fractals, utilisation d'instruments bricolés qui marchaient à peine, innombrables clichés fait de taches gris foncé sur fond gris clair, qu'il fallait photocopier, et photocopier encore pour les rendre publiables... Inattendu de constater que la complication extrême, prévue 60 ans plus tôt par Pierre Fatou et Gaston Julia, était visible à l'œil et manipulable à volonté. Ensuite, introduction d'un nouvel ensemble encore

plus compliqué, et inattendu de constater que la répétition de l'examen de ces clichés cristallisait cette complication en régularités jamais vues. Pour finir, j'allais noter plusieurs propriétés évidentes à l'œil, mais qui exigeaient d'être confirmées ou falsifiées. La suite est connue. Une grande conjecture fut démontrée aussitôt, d'autres après cinq ou dix ans seulement. Mais la principale reste à tel point ouverte que même des solutions partielles attirent admiration et enthousiasme (l'idée de l'ensemble en question peut être spécifiée de deux façons, disons, M et N : ce qui semble vrai, mais reste non démontré est que M est identique à N, plus les points limites de N).

Il était inattendu que, même quand il n'y a rien de «réaliste» dans les images fractales sorties de formules mathématiques toutes simples, ces images soient si largement perçues comme belles, et qu'il en soit de même pour les mélodies fractales.

Les images de la géométrie d'Euclide sont-elles belles ? Je reste de ceux qui le croient très profondément, mais la majorité des humains ne partage pas cet engouement. On lit ainsi, dans un livre écrit et illustre par Georges Rouault, *Cirque de l'étoile filante*, que «l'art suprême n'est pas quantitatif.» Cette opinion, qui n'est pas le fait d'un seul peintre, mérite d'être discutée.

Un tableau de Titien, de Rembrandt, de Picasso ou, même, du tâcheron dont on débite les œuvres dans les grandes surfaces peut-il être représenté quantitativement ? Bien sûr que non, si l'on exclut une description atome par atome, ou une description moins précise, mais suffisante pour produire des copies qui tromperait tous les experts.



2. L'ensemble de Mandelbrot.

Toutefois il ne s'ensuit nullement que je sois d'accord avec Rouault. Si l'art qu'il pratiquait ne pouvait être quantitatif, il n'est pas exclu que puisse émerger un art quantitatif, algorithmique, qui serait profondément différent du sien. Déjà, on trouve de la beauté aux montagnes et nuages fractals les plus classiques, faits dans un dessein simplement utilitaire, et aux vues, quelque austères qu'on les fasse, de l'ensemble de Mandelbrot. Mais qu'on relève la formule avec un piment de fantaisie, ou même de hasard, et l'on voit surgir toutes sortes d'effets fantastiques, marques de styles bien définis et qu'on aurait cru être nécessairement le fruit de la créativité artistique. Du point de vue de l'artiste, il n'y a là aucune trace de créativité artistique. Mais les émotions de l'amateur d'art ne s'accordent pas nécessairement avec celles de l'artiste. La discussion n'est pas près d'être close.

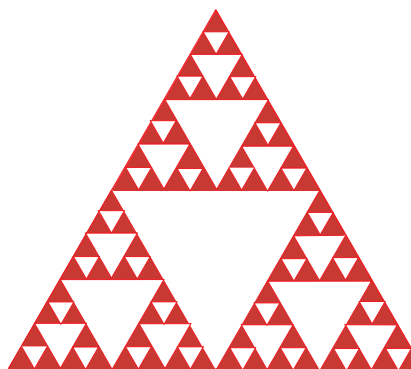
LE RUGUEUX

Il était inattendu que le même enfant, qui résistait aux parties les plus anciennes et les plus simples des mathématiques, puisse s'enflammer pour des objets géométriques d'une extraordinaire complexité.

Autrefois, on enseignait les mathématiques dans l'ordre où elles avaient été découvertes (puis l'ordre fut inversé, commençant par celles d'aujourd'hui, mais passons). Des maîtres excellents nous signalaient des faits que l'œil comprenait sans peine et déclarait évidents ; ils peinaient pour nous faire accepter que ces évidences restaient à démontrer, mais l'apprentissage fut lent, et gêné par mille exemples d'erreurs de démonstration «impunies,» que nous voyions même dans le travail de nos maîtres.

Voici donc un premier inattendu, qui repose la question de la «bosse des maths.» À la base du désir de prouver, on ne trouve pas tant le désir de mieux comprendre ce qu'on comprenait déjà un peu, mais plutôt le désir de comprendre

Document PLS



3. Un triangle de Sierpinski.

au moins un peu ce qui paraissait incompréhensible. Or, quoi de plus incompréhensible, quoi de plus magique (une magie désormais à la portée de tous) que les images fractales telles que celles de l'ensemble de Mandelbrot ? La longue préparation qui m'a poussé à les examiner n'est plus nécessaire aujourd'hui : le désir de les comprendre est devenu spontanément irrésistible pour l'enfant comme pour l'adulte.

Passant à la rigueur, combien il est inattendu qu'une activité presque manuelle, l'écriture de programmes d'ordinateur, ait changé la donne ! Elle nous apporta une métaphore puissante : les programmes qui suivent les règles marchent, les autres ne marchent pas. La machine vous le dit immédiatement (comme il se doit pour que l'apprentissage soit efficace). Il n'y a aucun sens à dire qu'un programme est «presque correct», seulement qu'il s'est révélé, après coup, facile à corriger. Bien sûr, les logiciels sont parfois défaillants, mais cela n'affaiblit pas le message : la différence fondamentale, mais subtile, que les mathématiques font entre le rigoureux et le non-rigoureux trouve une contrepartie «parlante» dans la différence, dont personne ne peut douter, entre les programmes qui marchent parce qu'ils obéissent strictement, sans exception, à toutes les règles, et les autres programmes.

Il était inattendu que ce soit dans l'analyse mathématique dite «fine» d'il y a 100 ans que se soit cachée la clef permettant de quantifier la notion de «rugueux».

En excluant Architas et Eudoxe de son Académie, Platon (selon Plutarque) maintenait «qu'ils corrompaient et gâtaient la dignité et ce qu'il y avait d'excellent en la géométrie... en la faisant descendre aux choses sensibles et matérielles.» Ce sont précisément certaines des «sensations» ainsi chassées qui allaient devenir les sources des sciences, tels la vision, l'ouïe et les sens du lourd, chaud ou sucré. Seul le sens du rugueux gardait une place exiguë et mal quantifiée.

Sans penser désobéir à Platon, des mathématiciens se lassaient de la dérivée, limite de dy/dx , et Hölder la remplaçait par la limite de $\log dy/\log dx$. Plus tard, Hausdorff et Besicovitch concevaient une dimension «anormale», sans aucune finalité concrète. De nombreuses décennies s'étant écoulées, l'inattendu survint quand je sus transmuier l'exposant de Hölder en exposant de rugosité, notion qu'on peut aussi exprimer en termes d'une dimension devenue fractale, et qu'on peut mesurer avec une grande précision. Elle joue pour le rugueux le rôle que la température joue pour le chaud.

Il était entendu que le monde physique est régi par des équations qui présupposent que tout varie de façon «douce». Comment se peut-il donc qu'il regorge de fractales ?

Ce qui était entendu reste vrai, mais il y a en général des singularités, où rien ne va plus. Ma thèse est qu'il est «typique» que ces singularités finissent par former un ensemble fractal. C'est, parmi d'autres exemples de plus en plus nombreux, la base de mon point de vue sur la turbulence et la nature de certaines arborescences fractales nommées DLA (agrégats limités par la diffusion), ainsi que la base de la théorie des interfaces de diffusion de Bernard Sapoval.

Il était inattendu qu'il devienne utile de concevoir le hasard comme tombant dans plusieurs «états» distincts. Le hasard ne sera jamais considéré comme désirable, mais, dans sa forme qu'on peut appeler usuelle, il a été si bien dompté que j'ai pu l'appeler bénin. On croyait même, sans d'ailleurs l'exprimer, que les conditions que cette forme postule sont nécessairement et automatiquement vérifiées dans la nature.

Il était donc inattendu que j'en vienne à constater que les marchés financiers et maints autres phénomènes imprévisibles échappent au hasard bénin. Soit ils ne satisfont pas les conditions requises, soit les conséquences tirées de ces conditions ne se révéleraient que dans des circonstances limites, qu'on ne rencontrera jamais. J'ai conclu qu'il fallait se faire à l'idée que, dans la nature, le hasard peut aussi se rencontrer dans au moins deux autres «états» : sauvage et lent.

Benoit MANDELBROT est professeur de sciences mathématiques à l'Université Yale et Fellow émérite au Centre de recherches T.J. Watson d'IBM.

Ce texte est une transcription du débat enregistré, avec Émile Noël, au Palais de la Découverte. Ce débat sera diffusé sur France Culture le 9 avril 1997, à 9h05.