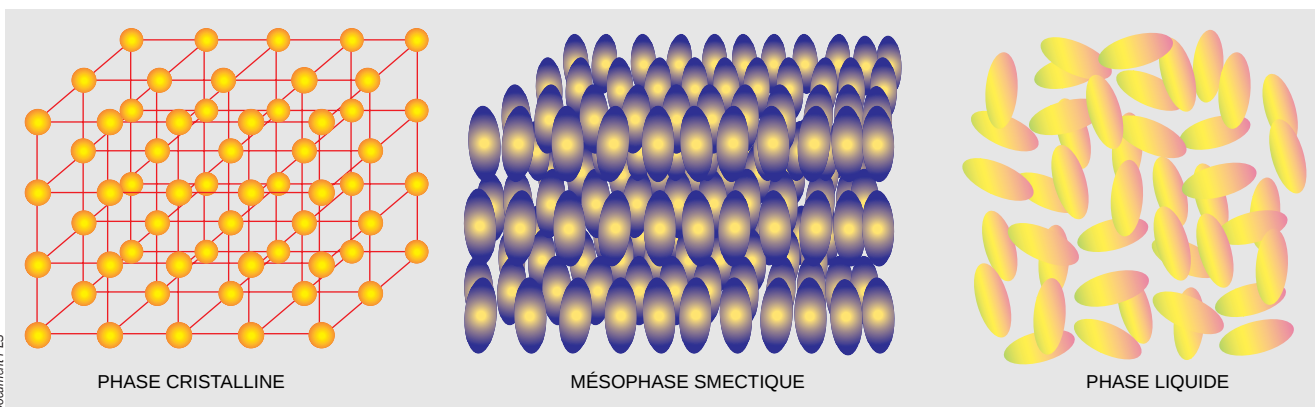




2. LA MÉSOPHASE SMECTIQUE a une structure intermédiaire entre le solide et le liquide.

phases, l'ordre cristallin est conservé au moins dans une direction.

Grâce à leur structure lamellaire, les cristaux liquides smectiques forment des films quand on les tend sur des cadres de forme arbitraire, les couches smectiques étant parallèles à la surface du film. Ces films sont analogues aux bulles de savon, à une différence près : une bulle a toujours deux couches de molécules de savon, avec de l'eau à l'intérieur, tandis que les films smectiques sont constitués uniquement des molécules du cristal liquide, et ils peuvent comporter un

nombre arbitraire de couches : les films smectiques sont beaucoup plus stables.

Les films smectiques sont connectés au cadre qui les supporte par l'intermédiaire d'un ménisque, qui est une succession de plages de plus en plus épaisses. La largeur du ménisque est en général négligeable par rapport à la taille du film lui-même.

Une fois tiré, le film ne fluctue pas tel un drapeau sous le vent, mais il reste plat comme la peau d'un tambour. Ce comportement indique la présence d'une certaine tension du film. Toutefois pour un film smectique, contrai-

rement aux cordes d'un instrument de musique, la tension existe de manière intrinsèque ; en revanche, la tension d'une corde peut être réglée, par exemple d'un tour de clef.

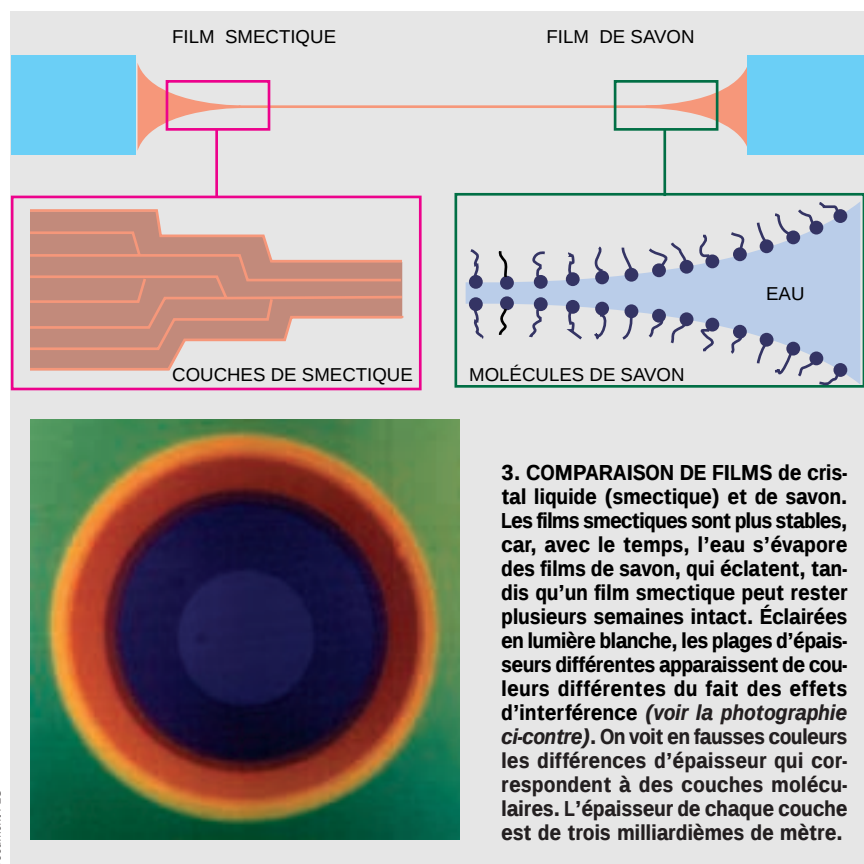
Les films smectiques : des membranes idéales

Un film smectique a une épaisseur comprise entre quelques couches moléculaires et quelques centaines de couches, soit au maximum quelques centaines de nanomètres ; cette grandeur est bien inférieure à sa dimension latérale, qui est de un centimètre environ. En conséquence, on peut négliger son épaisseur, c'est-à-dire le considérer comme un système bidimensionnel ; de plus, sa tension est uniforme.

Ces deux propriétés font du film smectique une membrane idéale, meilleure même qu'une peau de tambour tendue ; en effet, il est très difficile de tendre une peau de tambour de manière à ce que la tension soit parfaitement uniforme. Il est donc très commode d'utiliser un film smectique en tant que membrane vibrante.

Avant d'étudier les vibrations d'un film smectique, intéressons-nous tout d'abord au cas de la corde vibrante, qui constitue un système à une dimension. Sur le dessin de l'encadré page 68, nous avons représenté la position de la corde à l'équilibre (horizontale) et la position de la corde à un instant quelconque où elle vibre (on a ainsi photographié la corde pendant qu'elle vibrait).

Moyennant certaines approximations (amplitude de vibration suffisamment faible), on peut considérer que la trajectoire suivie par un point de la corde est verticale : le petit morceau de corde que l'on considère



«vibre» ainsi au cours du temps autour de sa position d'équilibre (horizontale). De son point de vue, il subit deux forces qui se compensent : d'une part, sa propre force d'inertie (due à son mouvement) ; d'autre part, il est soumis de la part du reste de la corde à une force, dite de «rappel», qui tend à le ramener vers sa position d'équilibre. Cette force de rappel est due à l'existence d'une tension dans la corde, qui s'oppose aux déformations éventuelles de celle-ci. Elle est proportionnelle à la courbure de la corde au point considéré ; en effet, plus la corde est courbée et plus le point a «envie» de retourner à sa position d'équilibre. Pour poser complètement le problème, il faut tenir compte du fait que la corde est attachée à ses deux extrémités («condition aux limites») : le déplacement de chaque extrémité de la corde est constamment nul au cours du temps.

Traduit en équations, ce problème est toujours soluble. La solution est une onde dite «stationnaire», ce qui signifie que la corde vibre en permanence, mais que cette vibration ne peut pas se propager ailleurs, ce qui est dû au fait que la corde est attachée aux deux extrémités et que sa longueur L est finie. Seules certaines fréquences de vibration sont possibles : on ne peut pas faire vibrer la corde à n'importe quelle fréquence.

Ces fréquences, dites «fréquences propres», sont en nombre infini, et sont des multiples de la fréquence fondamentale. Ce phénomène, bien connu, est à la base du principe de tous les instruments de musique à cordes : piano, violon, guitare, etc.

Remarquons que l'intervalle entre deux fréquences possibles est égal à $c/2L$; si L était infinie, cet intervalle tendrait vers zéro et n'importe quelle fréquence serait possible. Aussi le fait que seules certaines fréquences soient permises est bien dû à la condition aux limites sur les extrémités de la corde.

Vibrations des surfaces

Revenons au cas du film smectique mis en vibration, qui constitue un système à deux dimensions. Nous allons raisonner par analogie avec le cas de la corde, et voir les limites de cette analogie. Nous supposons que le film est infiniment fin et que sa surface est parfaitement plate au repos (ce qui

revient à négliger l'action de la pesanteur sur le film). On s'intéresse dorénavant à un point particulier de la membrane. Moyennant le même type d'approximations que pour la corde («régime linéaire»), on considère que la trajectoire de ce point est perpendiculaire au plan constitué par le film au repos. Ce point de la membrane subit également deux forces qui se compensent : une force d'inertie et une force de rappel. La force de rappel est due à la tension du film et elle est proportionnelle à sa courbure moyenne. La condition aux limites est que le film est attaché au cadre par le ménisque : là encore, les points situés «au bord» du film ne se déplacent jamais au cours du temps.

La solution au problème ainsi posé est encore une onde stationnaire : une solution correspondant à une certaine fréquence propre de vibration du film. La différence par rapport au cas de la corde est que le problème à deux dimensions est en général très difficile à résoudre par le calcul. En effet, la condition aux limites, qui implique une certaine répartition des fréquences propres, dépend de la forme du cadre, qui peut être plus ou moins compliquée. Dans le cas de la corde, le seul paramètre géométrique la définissant est sa longueur, ce qui est beaucoup plus simple.

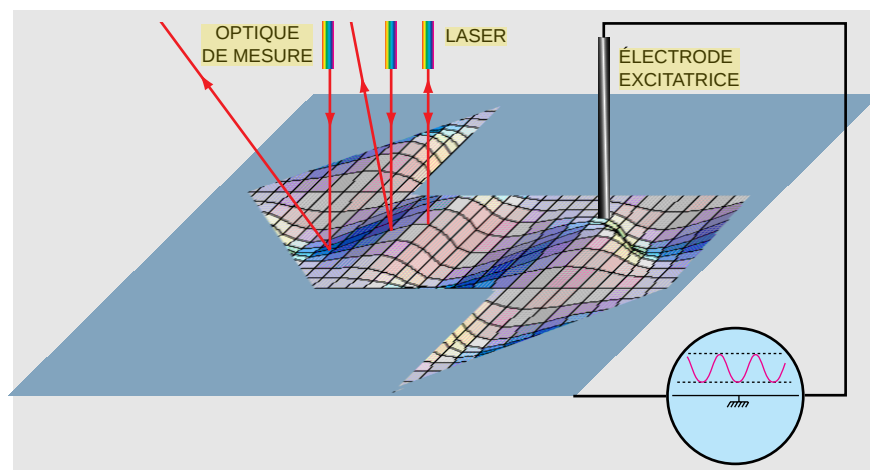
Pour quelques formes géométriques simples, on sait résoudre le problème : par exemple, quand le cadre est rectangulaire, circulaire ou triangulaire. Les fréquences propres, aussi bien dans le cas du carré que dans celui du cercle, ne sont plus réguliè-

lièrement espacées. Quand on entend un son formé de certaines des fréquences propres du carré ou du cercle, le résultat ne semble pas harmonieux, car notre oreille n'est pas habituée à des fréquences qui ne sont pas régulièrement espacées (comme c'est le cas pour tous les instruments de musique à cordes). En revanche, n'importe quel son formé de la superposition de certaines fréquences propres d'une corde nous semblerait tout à fait harmonieux.

La répartition des fréquences propres n'est pas identique pour le carré et pour le cercle. La question qui se pose alors naturellement est la suivante : connaissant les fréquences propres, pouvons-nous déterminer la forme de la surface ? C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert ont répondu par la négative en identifiant un contre-exemple, c'est-à-dire deux contours de formes différentes ayant le même spectre de fréquences propres. Nous les avons nommés «flèche» et «cocotte» en raison de leur forme.

La vérification expérimentale a été faite pour la première fois par S. Sridhar et A. Kudrolli en 1993 : leur expérience utilisait des cavités micro-ondes très aplaties, qui sont des systèmes analogues aux membranes vibrantes. L'expérience que nous avons réalisée au Laboratoire de physique des solides d'Orsay utilise un film smectique de cristal liquide, tendu sur un cadre d'une forme donnée (qui est bien sûr changée au cours des expériences).

L'expérience est réalisée sous vide, pour des raisons aussi bien théoriques que pratiques. En effet, si l'on réali-



4. DISPOSITIFS D'EXCITATION ET DE DÉTECTION des vibrations d'une membrane. L'excitation est obtenue au moyen d'une électrode. La partie continue de la tension attire les charges de la membrane, qui s'accumulent sous l'électrode. La composante alternative de la tension exerce alors une force électrostatique sinusoïdale. La détection utilise la réflexion d'un faisceau laser sur la surface de la membrane.

Transplantation, cocotte et flèche

La transplantation est une méthode mathématique démontrant que les contours «flèche» et «cocotte» ont les mêmes fréquences propres. À chaque fréquence de vibration de la membrane correspond un mode propre, c'est-à-dire la forme de la membrane à cette fréquence. Cette forme est décrite par la fonction d'onde, une fonction des coordonnées d'espace et de temps qui décrit la forme que prend le film en vibration.

Nous supposons que nous connaissons une fonction d'onde de l'un des deux contours pour une certaine fréquence f ; nous allons construire, à partir de cette fonction d'onde, une fonction d'onde du deuxième contour, pour la même fréquence. Prenons une fonction d'onde Ψ de «flèche», figée par la pensée à un instant donné. Ψ est par définition solution du «problème» évoqué dans le texte, c'est-à-dire de l'équation traduisant l'équilibre des forces agissant sur un point du film – *équation d'onde* – plus les conditions aux limites (Ψ doit s'annuler sur les bords du contour «flèche»). Comment, à partir de Ψ , construire ϕ , solution de l'équation d'onde pour la même fréquence, mais avec la condition que ϕ s'annule, cette fois, sur le contour de «cocotte»? Commençons par un cas particulier simple : choisissons le mode correspondant aux dessins des figures a, b et c. Les deux contours sont constitués de sept triangles comportant chacun un ventre au centre ; la ligne de séparation entre deux triangles et le contour de la forme entière sont des lignes de nœuds. Découpons la fonction d'onde ainsi décrite en sept morceaux correspondant à chacun des triangles.

Collons maintenant ces morceaux sur «cocotte» : on trouve alors la fonction d'onde de «cocotte». On vérifie que cette technique ne donne pas de résultat quand on essaie de les coller sur un contour dont un des triangles est inversé par rapport à «cocotte». Ce procédé fonctionne parce que «cocotte» et «flèche» ont des formes adéquates.

Nous pouvons aussi effectuer ce type d'opération pour un autre mode de vibration de la membrane, dont l'allure ne correspond plus aux figures b et c, et dont les nœuds de vibration ne correspondent plus aux diagonales précédemment décrites. Pour ce faire, nous compliquons un peu le jeu. Nous découpons Ψ (qui n'a plus l'allure des figures a et b) en sept morceaux comme précédemment. La différence est que les lignes entre deux triangles selon lesquelles on coupe ne sont plus des lignes de nœuds *a priori*. Appelons $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_7$ les sept morceaux de Ψ (voir les figures d et e). La difficulté est qu'il ne suffit plus maintenant de coller les morceaux sur «cocotte» pour

obtenir une fonction d'onde de celle-ci. Il faut effectuer trois collages, avec certains morceaux de Ψ qu'on a renversés (d'où les signes moins). La fonction ϕ est également découpée en sept morceaux numérotés de 1 à 7. Ainsi ϕ est égale à $\Psi_5 - \Psi_4 - \Psi_7$ sur le triangle en haut à gauche, à $\Psi_6 - \Psi_3 + \Psi_7$ sur le triangle juste en dessous, etc. Avant ces additions, on a fait coïncider les pourtours de couleurs des triangles, comme indiqué sur la figure f. Pourquoi cette opération? Pour que les conditions aux limites soient satisfaites.

La fonction ϕ ainsi construite doit s'annuler sur le contour de «cocotte». Considérons le triangle en haut à gauche de «cocotte», c'est-à-dire ϕ_1 . Cette partie de ϕ doit s'annuler sur les bords bleu et rouge du triangle considéré. Pour voir si c'est le cas, reportons-nous au dessin de «flèche» : on a $\Psi_5 = \Psi_4$ sur le bord bleu (Ψ est une fonction continue), donc $\Psi_5 - \Psi_4 = 0$; de plus, Ψ_7 s'annule sur le bord bleu, donc $\phi_1 = \Psi_5 - \Psi_4 - \Psi_7$ est bien nulle sur le bord bleu. Sur le bord rouge, $\Psi_5 = \Psi_7$ et $\Psi_4 = 0$, donc ϕ_1 s'annule bien sur ce bord-là également. On peut ainsi vérifier que chaque «restriction» de ϕ aux sept triangles de «cocotte» est bien nulle sur le contour.

Mais il y a une condition supplémentaire : la fonction ϕ , de même que Ψ , doit être une fonction continue, et ce notamment à la limite entre deux triangles. De plus, sa dérivée doit être également continue, afin d'assurer un raccord de pente «lisse» lors de l'opération de collage. Vérifions ce point pour ϕ_1 et ϕ_2 , c'est-à-dire l'égalité entre ϕ_1 et ϕ_2 , mais aussi entre leurs dérivées, sur le bord vert. Sur ce bord (voir à nouveau le dessin de «flèche»), $\Psi_5 = \Psi_6$, $\Psi_4 = \Psi_3$, et $\Psi_7 = 0$. La continuité de ϕ lors du passage de la «frontière» verte est alors assurée, tout comme celle de sa dérivée par le fait que Ψ_7 change de signe lors de ce passage, ce qui «renverse» la fonction et assure ainsi la continuité de la pente.

La fonction ϕ convient donc : elle a les propriétés de continuité requises pour une fonction d'onde, et nous avons réussi à la construire à partir d'une fonction d'onde de l'autre contour, pour une certaine fréquence propre f de ce dernier. Le fait que ϕ vibre à la même fréquence que Ψ peut se comprendre : nous n'avons fait que superposer des morceaux de Ψ vibrant tous à cette même fréquence f . En réalité, pour justifier que l'on a effectivement le droit d'effectuer cette superposition, il faut invoquer un argument de linéarité de l'équation d'onde, que nous passons sous silence ici.

La méthode décrite ici a été inventée par le mathématicien P. Buser, et adaptée à ces deux contours par un autre mathématicien, P. Bérard.

