

Transplantation, cocotte et flèche

La transplantation est une méthode mathématique démontrant que les contours «flèche» et «cocotte» ont les mêmes fréquences propres. À chaque fréquence de vibration de la membrane correspond un mode propre, c'est-à-dire la forme de la membrane à cette fréquence. Cette forme est décrite par la fonction d'onde, une fonction des coordonnées d'espace et de temps qui décrit la forme que prend le film en vibration.

Nous supposons que nous connaissons une fonction d'onde de l'un des deux contours pour une certaine fréquence f ; nous allons construire, à partir de cette fonction d'onde, une fonction d'onde du deuxième contour, pour la même fréquence. Prenons une fonction d'onde Ψ de «flèche», figée par la pensée à un instant donné. Ψ est par définition solution du «problème» évoqué dans le texte, c'est-à-dire de l'équation traduisant l'équilibre des forces agissant sur un point du film – *équation d'onde* – plus les conditions aux limites (Ψ doit s'annuler sur les bords du contour «flèche»). Comment, à partir de Ψ , construire ϕ , solution de l'équation d'onde pour la même fréquence, mais avec la condition que ϕ s'annule, cette fois, sur le contour de «cocotte»? Commençons par un cas particulier simple : choisissons le mode correspondant aux dessins des figures a, b et c. Les deux contours sont constitués de sept triangles comportant chacun un ventre au centre ; la ligne de séparation entre deux triangles et le contour de la forme entière sont des lignes de nœuds. Découpons la fonction d'onde ainsi décrite en sept morceaux correspondant à chacun des triangles.

Collons maintenant ces morceaux sur «cocotte» : on trouve alors la fonction d'onde de «cocotte». On vérifie que cette technique ne donne pas de résultat quand on essaie de les coller sur un contour dont un des triangles est inversé par rapport à «cocotte». Ce procédé fonctionne parce que «cocotte» et «flèche» ont des formes adéquates.

Nous pouvons aussi effectuer ce type d'opération pour un autre mode de vibration de la membrane, dont l'allure ne correspond plus aux figures b et c, et dont les nœuds de vibration ne correspondent plus aux diagonales précédemment décrites. Pour ce faire, nous compliquons un peu le jeu. Nous découpons Ψ (qui n'a plus l'allure des figures a et b) en sept morceaux comme précédemment. La différence est que les lignes entre deux triangles selon lesquelles on coupe ne sont plus des lignes de nœuds *a priori*. Appelons $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_7$ les sept morceaux de Ψ (voir les figures d et e). La difficulté est qu'il ne suffit plus maintenant de coller les morceaux sur «cocotte» pour

obtenir une fonction d'onde de celle-ci. Il faut effectuer trois collages, avec certains morceaux de Ψ qu'on a renversés (d'où les signes moins). La fonction ϕ est également découpée en sept morceaux numérotés de 1 à 7. Ainsi ϕ est égale à $\Psi_5 - \Psi_4 - \Psi_7$ sur le triangle en haut à gauche, à $\Psi_6 - \Psi_3 + \Psi_7$ sur le triangle juste en dessous, etc. Avant ces additions, on a fait coïncider les pourtours de couleurs des triangles, comme indiqué sur la figure f. Pourquoi cette opération? Pour que les conditions aux limites soient satisfaites.

La fonction ϕ ainsi construite doit s'annuler sur le contour de «cocotte». Considérons le triangle en haut à gauche de «cocotte», c'est-à-dire ϕ_1 . Cette partie de ϕ doit s'annuler sur les bords bleu et rouge du triangle considéré. Pour voir si c'est le cas, reportons-nous au dessin de «flèche» : on a $\Psi_5 = \Psi_4$ sur le bord bleu (Ψ est une fonction continue), donc $\Psi_5 - \Psi_4 = 0$; de plus, Ψ_7 s'annule sur le bord bleu, donc $\phi_1 = \Psi_5 - \Psi_4 - \Psi_7$ est bien nulle sur le bord bleu. Sur le bord rouge, $\Psi_5 = \Psi_7$ et $\Psi_4 = 0$, donc ϕ_1 s'annule bien sur ce bord-là également. On peut ainsi vérifier que chaque «restriction» de ϕ aux sept triangles de «cocotte» est bien nulle sur le contour.

Mais il y a une condition supplémentaire : la fonction ϕ , de même que Ψ , doit être une fonction continue, et ce notamment à la limite entre deux triangles. De plus, sa dérivée doit être également continue, afin d'assurer un raccord de pente «lisse» lors de l'opération de collage. Vérifions ce point pour ϕ_1 et ϕ_2 , c'est-à-dire l'égalité entre ϕ_1 et ϕ_2 , mais aussi entre leurs dérivées, sur le bord vert. Sur ce bord (voir à nouveau le dessin de «flèche»), $\Psi_5 = \Psi_6$, $\Psi_4 = \Psi_3$, et $\Psi_7 = 0$. La continuité de ϕ lors du passage de la «frontière» verte est alors assurée, tout comme celle de sa dérivée par le fait que Ψ_7 change de signe lors de ce passage, ce qui «renverse» la fonction et assure ainsi la continuité de la pente.

La fonction ϕ convient donc : elle a les propriétés de continuité requises pour une fonction d'onde, et nous avons réussi à la construire à partir d'une fonction d'onde de l'autre contour, pour une certaine fréquence propre f de ce dernier. Le fait que ϕ vibre à la même fréquence que Ψ peut se comprendre : nous n'avons fait que superposer des morceaux de Ψ vibrant tous à cette même fréquence f . En réalité, pour justifier que l'on a effectivement le droit d'effectuer cette superposition, il faut invoquer un argument de linéarité de l'équation d'onde, que nous passons sous silence ici.

La méthode décrite ici a été inventée par le mathématicien P. Buser, et adaptée à ces deux contours par un autre mathématicien, P. Bérard.

