

Transplantation, cocotte et flèche

La transplantation est une méthode mathématique démontrant que les contours «flèche» et «cocotte» ont les mêmes fréquences propres. À chaque fréquence de vibration de la membrane correspond un mode propre, c'est-à-dire la forme de la membrane à cette fréquence. Cette forme est décrite par la fonction d'onde, une fonction des coordonnées d'espace et de temps qui décrit la forme que prend le film en vibration.

Nous supposons que nous connaissons une fonction d'onde de l'un des deux contours pour une certaine fréquence f ; nous allons construire, à partir de cette fonction d'onde, une fonction d'onde du deuxième contour, pour la même fréquence. Prenons une fonction d'onde Ψ de «flèche», figée par la pensée à un instant donné. Ψ est par définition solution du «problème» évoqué dans le texte, c'est-à-dire de l'équation traduisant l'équilibre des forces agissant sur un point du film – *équation d'onde* – plus les conditions aux limites (Ψ doit s'annuler sur les bords du contour «flèche»). Comment, à partir de Ψ , construire ϕ , solution de l'équation d'onde pour la même fréquence, mais avec la condition que ϕ s'annule, cette fois, sur le contour de «cocotte»? Commençons par un cas particulier simple : choisissons le mode correspondant aux dessins des figures a, b et c. Les deux contours sont constitués de sept triangles comportant chacun un ventre au centre ; la ligne de séparation entre deux triangles et le contour de la forme entière sont des lignes de nœuds. Découpons la fonction d'onde ainsi décrite en sept morceaux correspondant à chacun des triangles.

Collons maintenant ces morceaux sur «cocotte» : on trouve alors la fonction d'onde de «cocotte». On vérifie que cette technique ne donne pas de résultat quand on essaie de les coller sur un contour dont un des triangles est inversé par rapport à «cocotte». Ce procédé fonctionne parce que «cocotte» et «flèche» ont des formes adéquates.

Nous pouvons aussi effectuer ce type d'opération pour un autre mode de vibration de la membrane, dont l'allure ne correspond plus aux figures b et c, et dont les nœuds de vibration ne correspondent plus aux diagonales précédemment décrites. Pour ce faire, nous compliquons un peu le jeu. Nous découpons Ψ (qui n'a plus l'allure des figures a et b) en sept morceaux comme précédemment. La différence est que les lignes entre deux triangles selon lesquelles on coupe ne sont plus des lignes de nœuds *a priori*. Appelons $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_7$ les sept morceaux de Ψ (voir les figures d et e). La difficulté est qu'il ne suffit plus maintenant de coller les morceaux sur «cocotte» pour

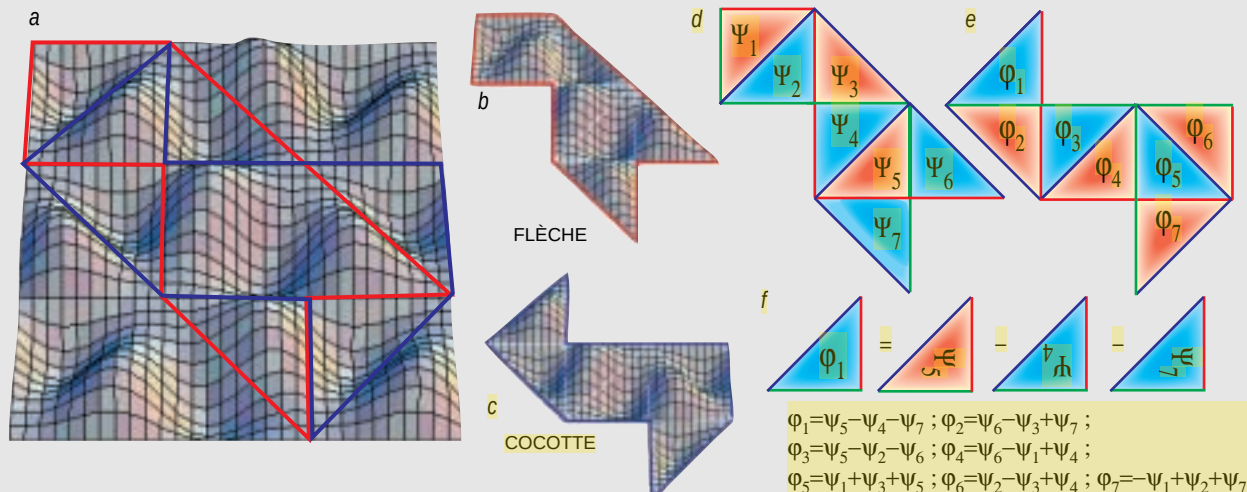
obtenir une fonction d'onde de celle-ci. Il faut effectuer trois collages, avec certains morceaux de Ψ qu'on a renversés (d'où les signes moins). La fonction ϕ est également découpée en sept morceaux numérotés de 1 à 7. Ainsi ϕ est égale à $\Psi_5 - \Psi_4 - \Psi_7$ sur le triangle en haut à gauche, à $\Psi_6 - \Psi_3 + \Psi_7$ sur le triangle juste en dessous, etc. Avant ces additions, on a fait coïncider les pourtours de couleurs des triangles, comme indiqué sur la figure f. Pourquoi cette opération? Pour que les conditions aux limites soient satisfaites.

La fonction ϕ ainsi construite doit s'annuler sur le contour de «cocotte». Considérons le triangle en haut à gauche de «cocotte», c'est-à-dire ϕ_1 . Cette partie de ϕ doit s'annuler sur les bords bleu et rouge du triangle considéré. Pour voir si c'est le cas, reportons-nous au dessin de «flèche» : on a $\Psi_5 = \Psi_4$ sur le bord bleu (Ψ est une fonction continue), donc $\Psi_5 - \Psi_4 = 0$; de plus, Ψ_7 s'annule sur le bord bleu, donc $\phi_1 = \Psi_5 - \Psi_4 - \Psi_7$ est bien nulle sur le bord bleu. Sur le bord rouge, $\Psi_5 = \Psi_7$ et $\Psi_4 = 0$, donc ϕ_1 s'annule bien sur ce bord-là également. On peut ainsi vérifier que chaque «restriction» de ϕ aux sept triangles de «cocotte» est bien nulle sur le contour.

Mais il y a une condition supplémentaire : la fonction ϕ , de même que Ψ , doit être une fonction continue, et ce notamment à la limite entre deux triangles. De plus, sa dérivée doit être également continue, afin d'assurer un raccord de pente «lisse» lors de l'opération de collage. Vérifions ce point pour ϕ_1 et ϕ_2 , c'est-à-dire l'égalité entre ϕ_1 et ϕ_2 , mais aussi entre leurs dérivées, sur le bord vert. Sur ce bord (voir à nouveau le dessin de «flèche»), $\Psi_5 = \Psi_6$, $\Psi_4 = \Psi_3$, et $\Psi_7 = 0$. La continuité de ϕ lors du passage de la «frontière» verte est alors assurée, tout comme celle de sa dérivée par le fait que Ψ_7 change de signe lors de ce passage, ce qui «renverse» la fonction et assure ainsi la continuité de la pente.

La fonction ϕ convient donc : elle a les propriétés de continuité requises pour une fonction d'onde, et nous avons réussi à la construire à partir d'une fonction d'onde de l'autre contour, pour une certaine fréquence propre f de ce dernier. Le fait que ϕ vibre à la même fréquence que Ψ peut se comprendre : nous n'avons fait que superposer des morceaux de Ψ vibrant tous à cette même fréquence f . En réalité, pour justifier que l'on a effectivement le droit d'effectuer cette superposition, il faut invoquer un argument de linéarité de l'équation d'onde, que nous passons sous silence ici.

La méthode décrite ici a été inventée par le mathématicien P. Buser, et adaptée à ces deux contours par un autre mathématicien, P. Bérard.



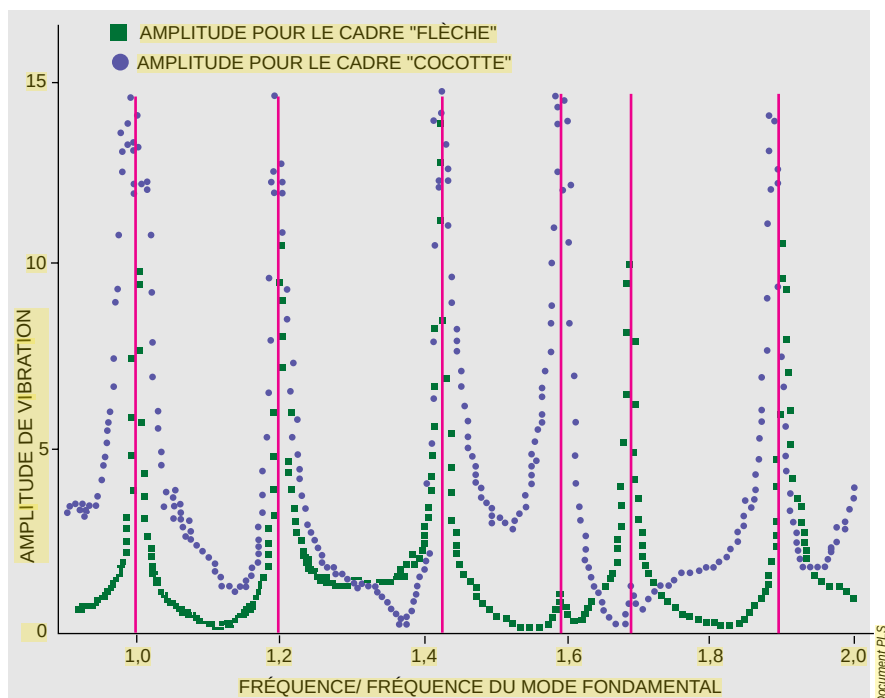
sait l'expérience dans l'air, ce dernier serait également mis en vibration, de sorte qu'il modifierait la vibration du film. De plus, un film sous vide a une durée de vie bien supérieure. L'inconvénient est qu'on ne peut pas exciter des ondes sonores à l'aide d'un haut-parleur dans le film mis sous vide. On utilise donc un dispositif d'excitation électrique, et ponctuel : il s'agit d'une électrode placée au-dessus du film. Le système de détection des vibrations du film est également ponctuel : on utilise en effet la réflexion d'un faisceau laser sur le film.

Nous avons donc tendu des films sur des cadres ayant la forme de «flèche» et de «cocotte». La figure 5 représente une courbe obtenue expérimentalement. On voit que les deux séries de pics d'amplitude (correspondant aux fréquences propres) pour «flèche» et pour «cocotte» se correspondent bien. Certains pics n'apparaissent que très écrasés : le mode correspondant est soit mal excité, soit mal détecté.

Effet Beg-Rohu

Ainsi, nous avons observé le comportement d'un film en vibration dans le régime linéaire, où nous avons adopté l'approximation que les trajectoires des points du film sont verticales. Cela revient à négliger la valeur de l'amplitude de vibration devant la taille du film. Lorsque les deux sont du même ordre de grandeur, le film se casse telle une corde trop tirée (néanmoins les cordes, étant plus rigides, se brisent plus difficilement). Mais quel est le comportement du film en vibration dans le cas intermédiaire, lorsque l'amplitude de vibration est petite, mais non négligeable par rapport à la dimension du film ?

En réalité, les trajectoires des points d'un film en vibration sont toujours légèrement courbées, et cette courbure est d'autant plus importante que l'amplitude de vibration est grande. La force centrifuge agit sur chaque corps se déplaçant sur une courbe et tend à le ramener vers une trajectoire rectiligne. Cette force lutte par exemple contre l'effet de gravitation et empêche les planètes en rotation de tomber sur le Soleil. Dans le cas des films smectiques, cette force a été baptisée force non linéaire. Cette force est proportionnelle à l'épaisseur



5. CES DEUX COURBES OBTENUES EXPÉRIMENTALEMENT correspondent aux cadres «flèche» et «cocotte». Une courbe représente l'amplitude de la déviation du faisceau laser réfléchi en un point donné du film en fonction de la fréquence d'excitation. Une fréquence propre de vibration correspond à un pic sur le graphe. On voit que les deux séries de pics correspondent aux deux cadres. Cependant, certains pics de «flèche» sont très écrasés pour «cocotte» et réciproquement. Cela est dû aux deux dispositifs d'excitation et de détection, qui sont ponctuels : certains modes sont mal excités, ou alors on a mis la détection au «mauvais endroit» pour l'un des modes.

du film, et inversement proportionnelle au rayon de courbure de la trajectoire de l'élément du film. Comme le rayon de courbure change d'un point à un autre, la force non linéaire n'est pas homogène. Ainsi, si l'épaisseur du film n'est pas uniforme, les plages plus épaisses sont entraînées vers les «ventres» du film en vibration où les trajectoires sont les moins courbées.

L'intérêt des expériences utilisant des films smectiques est leur grande maniabilité. De plus, ils constituent de véritables membranes sans qu'aucune analogie soit nécessaire, comme dans le cas des cavités micro-ondes. En

outre, les équations qui déterminent les fréquences propres de vibration sont analogues à l'équation de Schrödinger bidimensionnelle. Ainsi, la forme du film en vibration peut être «associée» à la fonction d'onde d'une particule quantique évoluant dans un puits de potentiel.

Les problèmes abordés dans cet article concernaient les films smectiques composés de couches liquides. Il existe également d'autres types de smectiques ; les différences entre ces mésophases se manifestent dans la force de rappel. Ainsi, en écoutant les vibrations du film, on peut «entendre» sa structure.

Maria BRAZOVSKAIA, Catherine EVEN et Pawel PIERANSKI sont chercheurs au Laboratoire de physique des solides, à Orsay.

P. PIERANSKI et al, *Phys. A*, vol. 194, n° 364, 1993.

J.W. RAYLEIGH, *The Theory of Sound*, Dover Publishing Inc., 1945.

M. KAC, *Am. Math. Monthly*, vol. 73, n° 1, 1966.

C. GORDON et D. WEBB, *You Can't Hear*

the Shape of a Drum, in *American Scientist*, janvier-février 1996.

S. SRIDHAR et A. KUDROLLI, *Phys. Rev. Letters*, vol. 72, n° 2175, 1994.

M. ALBERTINI, J-C. LACOUTURE et X. POUDRET, stage effectué au Laboratoire de physique des solides, 1996.

M. BRAZOVSKAIA, H. DUMOULIN et P. PIERANSKI, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, 1996.

Isabelle KRAUS, thèse de doctorat, Orsay, 1995.