

Sable et géométrie

ROGER ISS

En attendant les plages de l'été, faisons des tas de sable mathématiques.

Quand on verse du sable sur une plaque plane, horizontale et surélevée, il s'entasse, tandis que le sable excédentaire coule le long des bords. Quelle sera la forme du tas ? Si le contour de la plaque est un polygone convexe, on obtient finalement un tas polyédrique, limité par des faces planes qui passent chacune par un des côtés du polygone et qui font toutes le même angle aigu avec le plan horizontal (cet angle est de l'ordre de 30 à 35 degrés). Chaque arête de ce polyèdre est commune à deux faces, et chaque sommet est généralement commun à trois faces (et donc à trois arêtes) ; un sommet peut aussi appartenir à plus de trois arêtes, le cas extrême étant celui de la pyramide, dont le sommet unique est commun à toutes les arêtes.

Ainsi un tétraèdre s'établit sur une plaque triangulaire. Avec une plaque à quatre côtés, on obtient parfois une pyramide, parfois un « toit » à quatre pans. Dans cet article, nous ne nous intéresserons qu'aux tas dont aucun sommet n'est commun à plus de trois arêtes (à

nance de 3 et 4 côtés pour le quadrilatère, et une succession de faces à 3, 4, 4, 3, 5 côtés pour le pentagone.

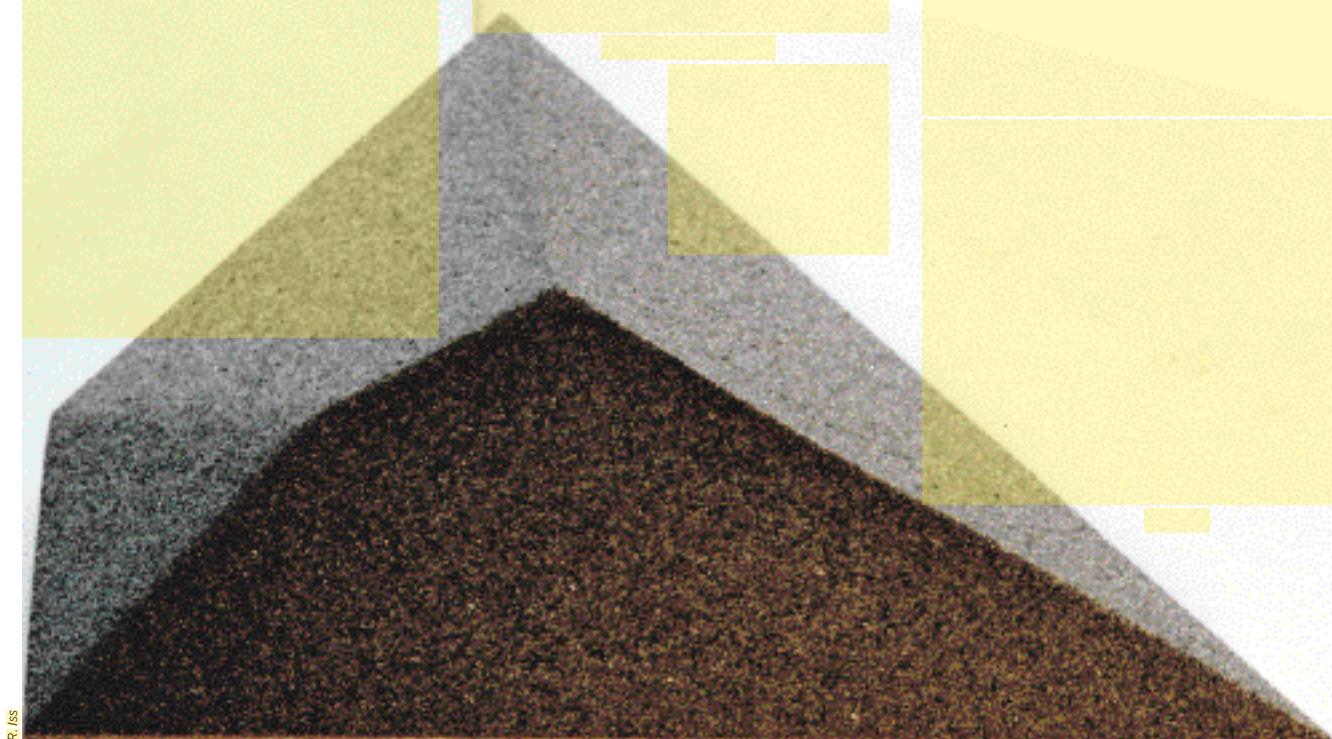
Puis, quand on passe à la plaque hexagonale, c'est la surprise : selon sa forme, on obtient trois types de tas de sable distincts par la nature de leurs faces et par leur répartition. Sur les schémas 3 c, d, e, on voit que ces trois tas ont respectivement des successions de faces à 3, 4, 5, 3, 4, 5 côtés ; 3, 4, 4, 4, 3, 6 côtés ; 3, 5, 3, 5, 3, 5 côtés.

Quels tas obtient-on pour des plaques ayant plus de six côtés ? Contentons-nous de dessiner les tas de sable en projection orthogonale sur le plan horizontal. Chaque arête d'un tas de sable étant l'intersection de deux faces de même pente, elle se projette sur le plan horizontal selon la bissectrice de l'angle formé par les côtés correspondants du polygone de base lorsqu'ils se coupent (ou leur prolongement) ; si ces côtés sont parallèles, l'arête se projette sur la parallèle équidistante de ces deux côtés. Saurez-vous le démontrer (les lecteurs recevront la solution en envoyant

l'étude des tas de sable en les dessinant, mais l'imprécision, qui augmente avec le nombre de côtés, nous pousse à abandonner l'expérience et à passer à la théorie. Commençons par convenir qu'un « polyèdre tas de sable » est un polyèdre convexe dont une face, nommée base, a un côté commun avec chacune des autres faces et fait le même angle aigu avec chacune d'elles. À partir de cette définition, nous pourrions démontrer toutes les propriétés des tas de sable observées expérimentalement, mais un bon mathématicien cherche toujours à généraliser une définition, c'est-à-dire à « plonger » l'ensemble des objets qu'il considère dans un ensemble plus vaste ; l'étude de l'ensemble élargi donne souvent des indications utiles pour le problème initial.

LES TECTOÈDRES

Or, dans la définition des tas de sable, il y a une contrainte dont on peut se libérer : l'égale inclinaison des faces. Pour généraliser les tas de sable, imaginons des tas dont les faces auraient des pentes différentes (nous pourrions les fabriquer en terre glaise ou en pâte à modeler, en découpant les faces avec un couteau). Leur dessin en projection horizontale est alors plus facile que pour les tas de sable, car les projections des arêtes ne sont plus des bissectrices. Pour ces dessins, il suffit de respecter deux règles : si une arête est l'intersection des faces déterminées par deux côtés de la base, elle passe par le point



1. Tas de sable confectionné sur un quadrilatère.

Quand on fabrique les tas de sable, on constate qu'ils ont toujours au moins deux faces triangulaires. Peut-on maintenant le démontrer ?

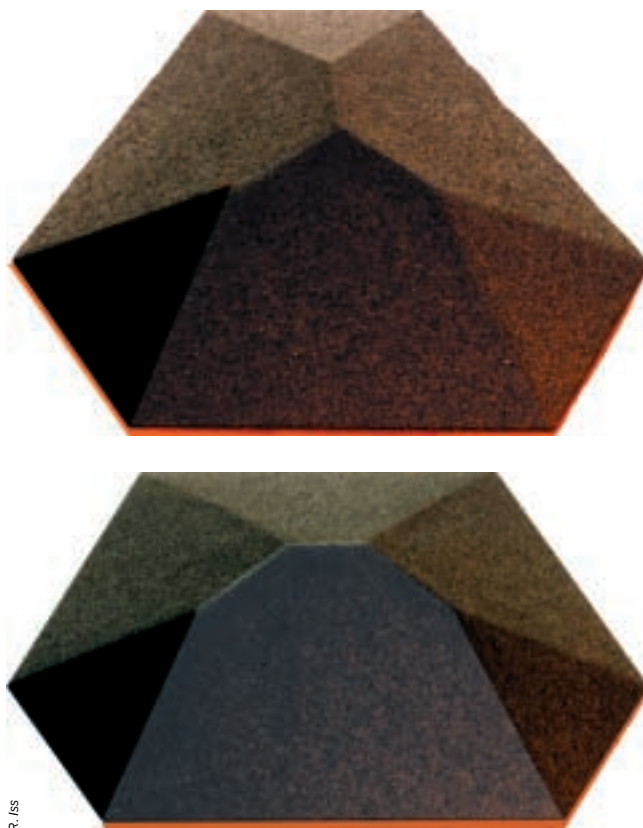
Parmi les arêtes, on en distingue deux types : celles qui sont issues d'un sommet de la base et communes à deux faces adjacentes, que nous nommerons arêtes latérales ; et celles qui joignent deux sommets n'appartenant pas à la base, que nous nommerons arêtes sommitales (voir la figure 4). De même, on distingue trois types de sommets (en dehors de ceux de la base), selon le type des arêtes qui en sont issues : de type 1, quand deux des arêtes sont latérales et la troisième sommitale (une des faces auxquelles un tel sommet appartient est un triangle) ; de type 2, quand une arête est latérale et les deux autres sommitales ; de type 3 quand les trois arêtes issues de ce sommet sont sommitales (plus de trois arêtes ne peuvent être latérales que dans les cas écartés).

Considérons maintenant un tectoèdre d'ordre n supérieur à 3, et nommons S_1, S_2, S_3 le nombre de ses sommets respectivement de type 1, 2, 3. Le nombre des arêtes latérales se déduit directement du nombre des sommets de types 1 et 2 : il est égal à $2S_1 + S_2$. De surcroît, comme il passe exactement une arête latérale par chaque sommet de la base, le nombre d'arêtes latérales est égal à n ; donc $2S_1 + S_2 = n$.

Combien le tectoèdre possède-t-il d'arêtes sommitales ? Quand on ajoute les nombres d'arêtes sommitales pour tous les sommets, on trouve $S_1 + 2S_2 + 3S_3$, mais, dans ce total, chaque arête sommitale est comptée deux fois. Aussi le nombre d'arêtes sommitales est-il égal à $(S_1 + 2S_2 + 3S_3)/2$, ce que l'on peut encore écrire, à l'aide de la relation précédemment trouvée : $n + 3(S_3 - S_1)/2$.

En faisant ces dénombrements pour le tectoèdre (base comprise), on trouve que le nombre total S des sommets est $2n + S_3 - S_1$; celui A des arêtes est $3n + 3(S_3 - S_1)/2$, et celui F des faces est $n + 1$. Or le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) a démontré que, pour un polyèdre, ces trois nombres sont liés par la relation $F + S - A = 2$. En remplaçant les nombres F, S, A par leur valeur, nous trouvons ici : $S_1 = S_3 + 2$.

On en déduit que S_1 est supérieur ou égal à 2, et l'on obtient ainsi la confir-



2. Deux des trois types de tas de sable qui s'édifient sur des plaques hexagonales.

mation de la surprenante observation précédente : tout tectoèdre a, au moins, deux faces triangulaires. En outre, les nombres A et S deviennent alors respectivement $2n - 2$ et $2n - 3$: dans un tectoèdre d'ordre n , il existe, quelle que soit sa forme, $n - 2$ sommets autres que ceux de la base et $n - 3$ arêtes sommitales. N'est-ce pas étonnant que ces deux nombres soient indépendants de la forme du tectoèdre, et ne dépendent que du nombre de sommets de sa base ?

TRONCATURE TRIANGULAIRE

Imaginons, comme précédemment, que le tectoèdre étudié soit en terre glaise et posé sur une table. Avec un couteau, coupons une « pointe » de ce solide, par une coupe plane jusqu'au ras de la table. En enlevant le petit tétraèdre ainsi détaché (voir la figure 7), on obtient encore un tectoèdre ayant une nouvelle face triangulaire.

De façon plus mathématique, considérons un sommet S de la base d'un tectoèdre d'ordre n . Sur chacune des trois arêtes issues de S , choisissons respectivement trois points A, B, C , puis enlevons au tectoèdre initial le tétraèdre $SABC$ ainsi défini. Le solide restant est encore un tectoèdre, mais d'ordre $n + 1$. Cette

opération de «troncature triangulaire» nous permet d'obtenir des tectoèdres d'ordre aussi élevé que l'on veut, à partir d'un tectoèdre donné.

Inversement, considérons sur un tectoèdre une face triangulaire ABC , où BC est un côté de la base, et supposons que les deux côtés de cette base, adjacents au côté BC , se coupent en un point S extérieur au polygone de base. Les points S, A, B, C déterminent un tétraèdre. En le collant au tectoèdre initial, on obtient encore un tectoèdre, mais cette fois d'ordre $n - 1$: c'est l'opération inverse de la troncature triangulaire.

On démontre, en effet, que, pour une au moins des faces triangulaires, cette opération est possible. La seule impossibilité se présente pour un tectoèdre d'ordre quatre, dont la base est un trapèze et l'arête sommitale parallèle au plan de base (voir la figure 6) : le point S considéré précédemment n'existe pour aucune de ses deux faces triangulaires. Ce polyèdre ne peut manifestement pas être obtenu par troncature d'un tétraèdre, puisque ce dernier n'a pas d'arête parallèle au plan de base. Par conséquent, tous les tectoèdres descendent d'un tétraèdre par des troncatures successives, sauf ceux dont une arête est parallèle au plan de base, et qui descendent alors du tectoèdre d'ordre quatre précédent.

LA FORMULE D'UN TECTOÈDRE

Dans notre recherche des types de tas possibles, sur une plaque polygonale donnée, nous nous intéressons moins à la forme des tectoèdres qu'à la répartition de leurs faces et au nombre de leurs côtés. Ces informations sont faciles à décrire par un code numérique : marquons sur chacune des faces le nombre des arêtes sommitales qui la limitent (c'est le nombre de ses côtés diminué de trois unités), soit 0 pour une face triangulaire, 1 pour une face à quatre côtés, etc. Lisons ces nombres dans l'ordre où ils se présentent quand on parcourt le polygone de base dans un certain sens. On obtient ainsi une suite de nombres entiers, par exemple 1, 1, 0, 2, 0 pour le tectoèdre de la figure 5.

Évidemment, une telle suite n'est pas unique : elle peut être commencée par n'importe quel terme ; c'est un