

Quand on fabrique les tas de sable, on constate qu'ils ont toujours au moins deux faces triangulaires. Peut-on maintenant le démontrer ?

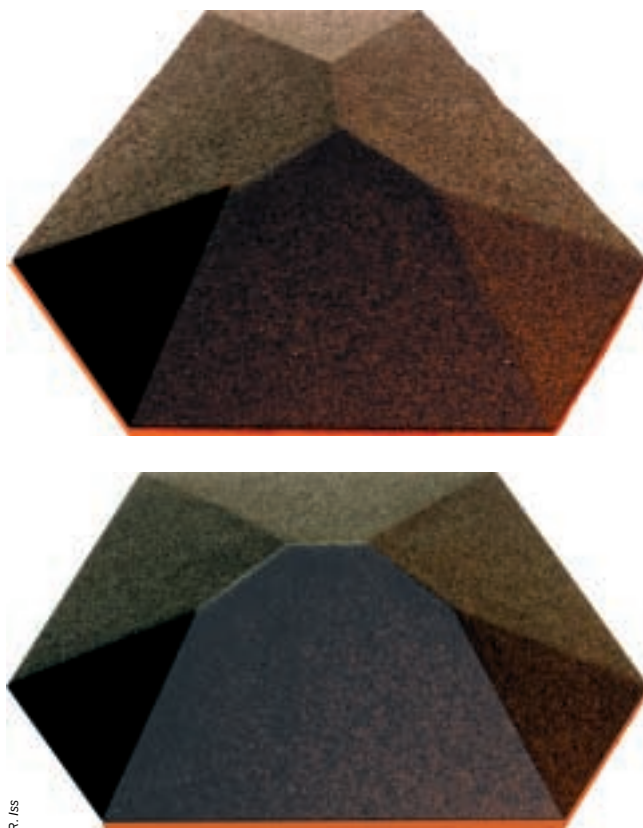
Parmi les arêtes, on en distingue deux types : celles qui sont issues d'un sommet de la base et communes à deux faces adjacentes, que nous nommerons arêtes latérales ; et celles qui joignent deux sommets n'appartenant pas à la base, que nous nommerons arêtes sommitales (voir la figure 4). De même, on distingue trois types de sommets (en dehors de ceux de la base), selon le type des arêtes qui en sont issues : de type 1, quand deux des arêtes sont latérales et la troisième sommitale (une des faces auxquelles un tel sommet appartient est un triangle) ; de type 2, quand une arête est latérale et les deux autres sommitales ; de type 3 quand les trois arêtes issues de ce sommet sont sommitales (plus de trois arêtes ne peuvent être latérales que dans les cas écartés).

Considérons maintenant un tectoèdre d'ordre n supérieur à 3, et nommons S_1, S_2, S_3 le nombre de ses sommets respectivement de type 1, 2, 3. Le nombre des arêtes latérales se déduit directement du nombre des sommets de types 1 et 2 : il est égal à $2S_1 + S_2$. De surcroît, comme il passe exactement une arête latérale par chaque sommet de la base, le nombre d'arêtes latérales est égal à n ; donc $2S_1 + S_2 = n$.

Combien le tectoèdre possède-t-il d'arêtes sommitales ? Quand on ajoute les nombres d'arêtes sommitales pour tous les sommets, on trouve $S_1 + 2S_2 + 3S_3$, mais, dans ce total, chaque arête sommitale est comptée deux fois. Aussi le nombre d'arêtes sommitales est-il égal à $(S_1 + 2S_2 + 3S_3)/2$, ce que l'on peut encore écrire, à l'aide de la relation précédemment trouvée : $n + 3(S_3 - S_1)/2$.

En faisant ces dénombrements pour le tectoèdre (base comprise), on trouve que le nombre total S des sommets est $2n + S_3 - S_1$; celui A des arêtes est $3n + 3(S_3 - S_1)/2$, et celui F des faces est $n + 1$. Or le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) a démontré que, pour un polyèdre, ces trois nombres sont liés par la relation $F + S - A = 2$. En remplaçant les nombres F, S, A par leur valeur, nous trouvons ici : $S_1 = S_3 + 2$.

On en déduit que S_1 est supérieur ou égal à 2, et l'on obtient ainsi la confir-



2. Deux des trois types de tas de sable qui s'édifient sur des plaques hexagonales.

mation de la surprenante observation précédente : tout tectoèdre a, au moins, deux faces triangulaires. En outre, les nombres A et S deviennent alors respectivement $2n - 2$ et $2n - 3$: dans un tectoèdre d'ordre n , il existe, quelle que soit sa forme, $n - 2$ sommets autres que ceux de la base et $n - 3$ arêtes sommitales. N'est-ce pas étonnant que ces deux nombres soient indépendants de la forme du tectoèdre, et ne dépendent que du nombre de sommets de sa base ?

TRONCATURE TRIANGULAIRE

Imaginons, comme précédemment, que le tectoèdre étudié soit en terre glaise et posé sur une table. Avec un couteau, coupons une « pointe » de ce solide, par une coupe plane jusqu'au ras de la table. En enlevant le petit tétraèdre ainsi détaché (voir la figure 7), on obtient encore un tectoèdre ayant une nouvelle face triangulaire.

De façon plus mathématique, considérons un sommet S de la base d'un tectoèdre d'ordre n . Sur chacune des trois arêtes issues de S , choisissons respectivement trois points A, B, C , puis enlevons au tectoèdre initial le tétraèdre $SABC$ ainsi défini. Le solide restant est encore un tectoèdre, mais d'ordre $n + 1$. Cette

opération de « troncature triangulaire » nous permet d'obtenir des tectoèdres d'ordre aussi élevé que l'on veut, à partir d'un tectoèdre donné.

Inversement, considérons sur un tectoèdre une face triangulaire ABC , où BC est un côté de la base, et supposons que les deux côtés de cette base, adjacents au côté BC , se coupent en un point S extérieur au polygone de base. Les points S, A, B, C déterminent un tétraèdre. En le collant au tectoèdre initial, on obtient encore un tectoèdre, mais cette fois d'ordre $n - 1$: c'est l'opération inverse de la troncature triangulaire.

On démontre, en effet, que, pour une au moins des faces triangulaires, cette opération est possible. La seule impossibilité se présente pour un tectoèdre d'ordre quatre, dont la base est un trapèze et l'arête sommitale parallèle au plan de base (voir la figure 6) : le point S considéré précédemment n'existe pour aucune de ses deux faces triangulaires. Ce polyèdre ne peut manifestement pas être obtenu par troncature d'un tétraèdre, puisque ce dernier n'a pas d'arête parallèle au plan de base. Par conséquent, tous les tectoèdres descendent d'un tétraèdre par des troncatures successives, sauf ceux dont une arête est parallèle au plan de base, et qui descendent alors du tectoèdre d'ordre quatre précédent.

LA FORMULE D'UN TECTOÈDRE

Dans notre recherche des types de tas possibles, sur une plaque polygonale donnée, nous nous intéressons moins à la forme des tectoèdres qu'à la répartition de leurs faces et au nombre de leurs côtés. Ces informations sont faciles à décrire par un code numérique : marquons sur chacune des faces le nombre des arêtes sommitales qui la limitent (c'est le nombre de ses côtés diminué de trois unités), soit 0 pour une face triangulaire, 1 pour une face à quatre côtés, etc. Lisons ces nombres dans l'ordre où ils se présentent quand on parcourt le polygone de base dans un certain sens. On obtient ainsi une suite de nombres entiers, par exemple 1, 1, 0, 2, 0 pour le tectoèdre de la figure 5.

Évidemment, une telle suite n'est pas unique : elle peut être commentée par n'importe quel terme ; c'est un

cycle. En outre, comme on convient de ne pas distinguer un tectoèdre de son symétrique par rapport à un plan (son image dans un miroir), la suite peut être lue dans n'importe quel sens. Convenons de classer toutes les écritures de cette suite par ordre lexicographique, comme le sont les mots dans un dictionnaire : si deux suites diffèrent par leur premier terme, la plus grande est celle qui a le plus grand premier terme ; si elles commencent par deux termes égaux, la plus grande est celle qui a le plus grand deuxième terme ; etc. Ne conservons que la plus grande de toutes ces suites, et nommons-la for-

mule du tectoèdre. Ainsi, des cinq suites 11020, 10201, 02011, 20110 et 01102 associées au tectoèdre précédent, on ne retient que 20110 ; c'est la formule de ce tectoèdre.

La troncature a un effet simple sur la formule d'un tectoèdre. Elle crée une face triangulaire qui s'intercale entre deux faces adjacentes, dont le nombre des arêtes sommitales augmente d'une unité, leur arête latérale commune étant devenue sommitale : ainsi, dans la formule, un zéro s'introduit entre deux termes consécutifs, et les deux nombres ainsi séparés augmentent d'une unité (on n'oublie pas que ces formules sont

cycliques, et que le premier et le dernier terme sont consécutifs dans le cycle).

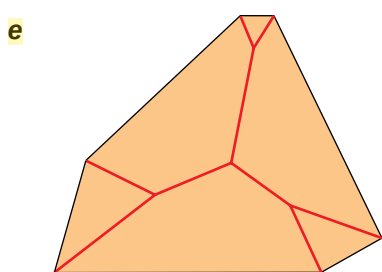
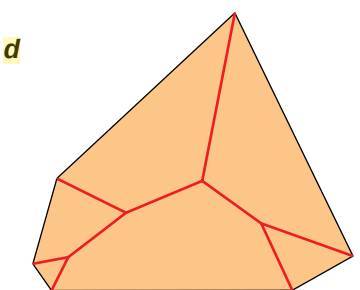
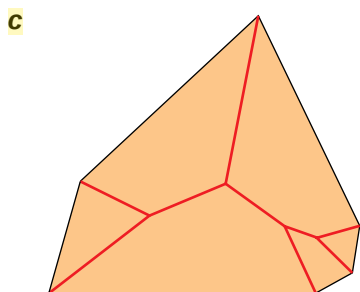
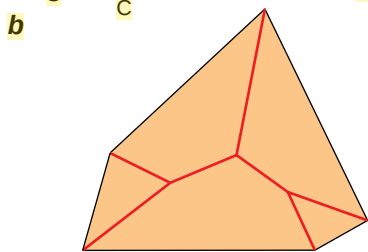
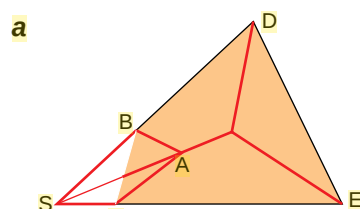
L'opération inverse a également un effet simple : elle correspond à la suppression d'un zéro, dans la formule, et à la diminution d'une unité des deux nombres qui l'encadrent (ce qui est toujours possible, puisque les formules ne comportent jamais deux zéros consécutifs : on démontre que deux faces triangulaires ne sont jamais adjacentes, sauf dans le cas du tétraèdre et dans des cas particuliers qui ont été écartés).

Comment dessiner un tectoèdre ou un tas de sable, connaissant sa formule ? Observons tout d'abord que le nombre de termes de la formule donne le nombre de côtés du polygone de base. Il suffit de remonter la formule, par des suppressions de zéros, jusqu'à celle du tétraèdre, en notant les formules intermédiaires. Celles-ci constituent en effet un « programme » des troncatures successives à effectuer, à partir du tétraèdre, pour parvenir au tectoèdre ou au tas de sable cherché.

Par exemple, dans la formule 20110, si on supprime le 0 en deuxième position, on obtient 1010 ; puis on répète l'opération pour le 0 en deuxième position de cette nouvelle formule, et l'on trouve 000, qui est la formule du tétraèdre. Chaque formule définit donc une classe de tectoèdres, donc aussi de tas de sable, dont les faces sont réparties de la même manière, avec le même nombre de côtés. Comme un polygone de base donné détermine un seul tas de sable, la classification des tas de sable par leur formule est aussi une classification des polygones convexes : deux polygones appartiennent à la même classe si les tas de sable qui se forment sur eux ont la même formule.

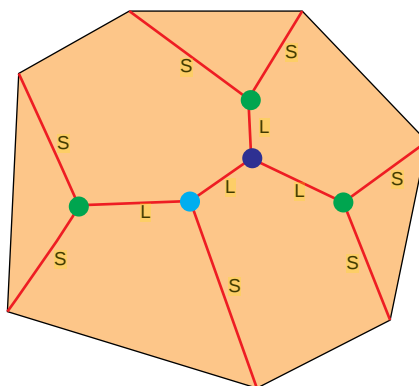
À l'aide des transformations de formule associées à la troncature et à son opération inverse, notre étude des diverses formes de tas de sable devient purement numérique. Malheureusement, si cette méthode donne bien toutes les formules d'ordre n à partir de celles d'ordre $n - 1$, elle les donne avec des répétitions, la même formule pouvant être obtenue plusieurs fois, à une permutation ou à une inversion près. En intercalant des zéros dans la formule 20110 du tectoèdre d'ordre cinq, on obtient les cinq suites : 301110, 210210, 202020, 201201, 030111, qui se ramènent aux trois formules 301110, 210210, 202020. Ce sont les trois variétés de tectoèdres d'ordre six que nous avons trouvées en faisant des tas de sable.

Combien existe-t-il de variétés de tectoèdres, pour les valeurs de n supérieures à six ? Pour les tectoèdres à base heptagonale ou octogonale, on parvient

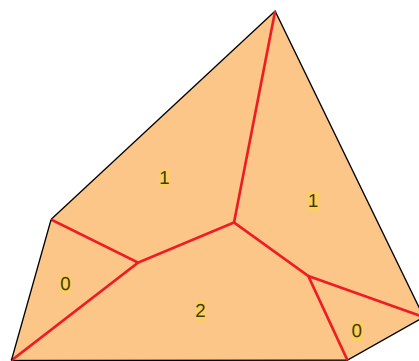


Documents A.S.

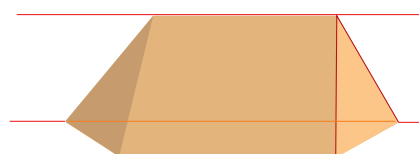
3. Projection de tas de sable sur un plan horizontal.



4. Les sommets sont de trois types, selon la nature des arêtes qui y convergent : de type 1 (en vert) quand deux arêtes sont latérales (elles sont issues de sommets du polygone de base) et une arête est sommitale (entre deux sommets qui n'appartiennent pas au polygone de base), de type 2 (en bleu ciel) quand deux arêtes sommitales et une arête latérale y convergent, et de type 3 (en violet) quand il est commun à trois arêtes sommitales.



5. On représente un tectoèdre par sa formule. Pour établir cette dernière, on numérote 0 les faces triangulaires, 1 les faces à quatre côtés, 2 les faces pentagonales, etc. Ainsi la formule du tectoèdre ci-dessus est 20110.



6. Le seul tectoèdre qui ne s'obtient pas par troncature à partir d'un tétraèdre.