

cycle. En outre, comme on convient de ne pas distinguer un tectoèdre de son symétrique par rapport à un plan (son image dans un miroir), la suite peut être lue dans n'importe quel sens. Convenons de classer toutes les écritures de cette suite par ordre lexicographique, comme le sont les mots dans un dictionnaire : si deux suites diffèrent par leur premier terme, la plus grande est celle qui a le plus grand premier terme ; si elles commencent par deux termes égaux, la plus grande est celle qui a le plus grand deuxième terme ; etc. Ne conservons que la plus grande de toutes ces suites, et nommons-la for-

mule du tectoèdre. Ainsi, des cinq suites 11020, 10201, 02011, 20110 et 01102 associées au tectoèdre précédent, on ne retient que 20110 ; c'est la formule de ce tectoèdre.

La troncature a un effet simple sur la formule d'un tectoèdre. Elle crée une face triangulaire qui s'intercale entre deux faces adjacentes, dont le nombre des arêtes sommitales augmente d'une unité, leur arête latérale commune étant devenue sommitale : ainsi, dans la formule, un zéro s'introduit entre deux termes consécutifs, et les deux nombres ainsi séparés augmentent d'une unité (on n'oublie pas que ces formules sont

cycliques, et que le premier et le dernier terme sont consécutifs dans le cycle).

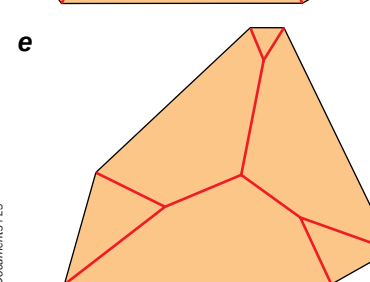
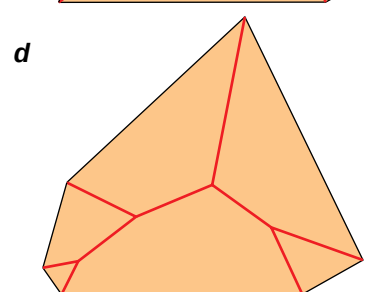
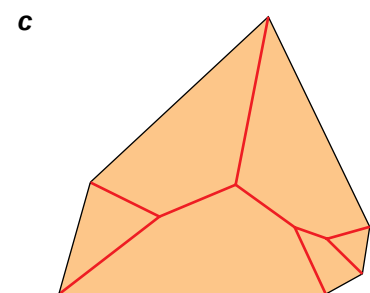
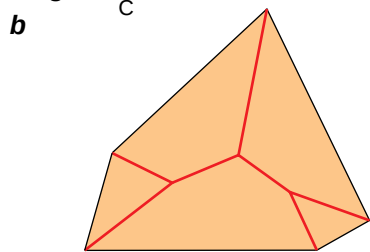
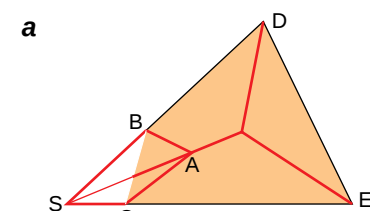
L'opération inverse a également un effet simple : elle correspond à la suppression d'un zéro, dans la formule, et à la diminution d'une unité des deux nombres qui l'encadrent (ce qui est toujours possible, puisque les formules ne comportent jamais deux zéros consécutifs : on démontre que deux faces triangulaires ne sont jamais adjacentes, sauf dans le cas du tétraèdre et dans des cas particuliers qui ont été écartés).

Comment dessiner un tectoèdre ou un tas de sable, connaissant sa formule ? Observons tout d'abord que le nombre de termes de la formule donne le nombre de côtés du polygone de base. Il suffit de remonter la formule, par des suppressions de zéros, jusqu'à celle du tétraèdre, en notant les formules intermédiaires. Celles-ci constituent en effet un « programme » des troncatures successives à effectuer, à partir du tétraèdre, pour parvenir au tectoèdre ou au tas de sable cherché.

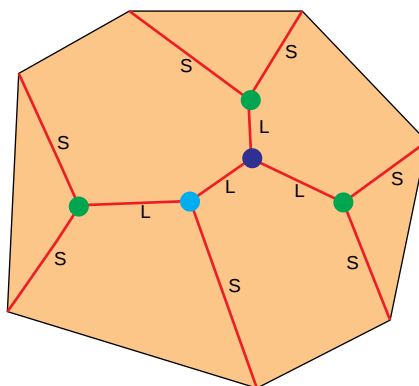
Par exemple, dans la formule 20110, si on supprime le 0 en deuxième position, on obtient 1010 ; puis on répète l'opération pour le 0 en deuxième position de cette nouvelle formule, et l'on trouve 000, qui est la formule du tétraèdre. Chaque formule définit donc une classe de tectoèdres, donc aussi de tas de sable, dont les faces sont réparties de la même manière, avec le même nombre de côtés. Comme un polygone de base donné détermine un seul tas de sable, la classification des tas de sable par leur formule est aussi une classification des polygones convexes : deux polygones appartiennent à la même classe si les tas de sable qui se forment sur eux ont la même formule.

À l'aide des transformations de formule associées à la troncature et à son opération inverse, notre étude des diverses formes de tas de sable devient purement numérique. Malheureusement, si cette méthode donne bien toutes les formules d'ordre n à partir de celles d'ordre $n - 1$, elle les donne avec des répétitions, la même formule pouvant être obtenue plusieurs fois, à une permutation ou à une inversion près. En intercalant des zéros dans la formule 20110 du tectoèdre d'ordre cinq, on obtient les cinq suites : 301110, 210210, 202020, 201201, 030111, qui se ramènent aux trois formules 301110, 210210, 202020. Ce sont les trois variétés de tectoèdres d'ordre six que nous avons trouvées en faisant des tas de sable.

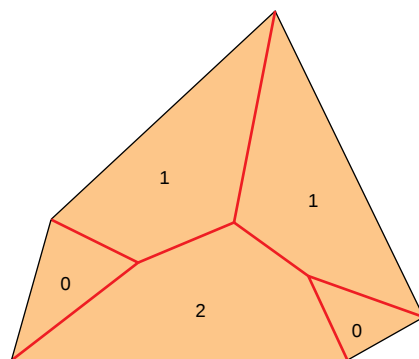
Combien existe-t-il de variétés de tectoèdres, pour les valeurs de n supérieures à six ? Pour les tectoèdres à base heptagonale ou octogonale, on parvient



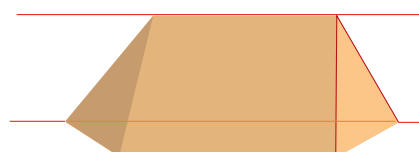
3. Projection de tas de sable sur un plan horizontal.



4. Les sommets sont de trois types, selon la nature des arêtes qui y convergent : de type 1 (en vert) quand deux arêtes sont latérales (elles sont issues de sommets du polygone de base) et une arête est sommitale (entre deux sommets qui n'appartiennent pas au polygone de base), de type 2 (en bleu ciel) quand deux arêtes sommitales et une arête latérale y convergent, et de type 3 (en violet) quand il est commun à trois arêtes sommitales.



5. On représente un tectoèdre par sa formule. Pour établir cette dernière, on numérote 0 les faces triangulaires, 1 les faces à quatre côtés, 2 les faces pentagonales, etc. Ainsi la formule du tectoèdre ci-dessus est 20110.



6. Le seul tectoèdre qui ne s'obtient pas par troncature à partir d'un tétraèdre.

encore à effectuer l'opération précédente à la main, mais le travail est rapidement fastidieux, et un ordinateur s'impose. Voici, pour les valeurs de n comprises entre 6 et 15, le nombre de formules que l'on peut respectivement déterminer : 3, 4, 12, 27, 82, 228, 733, 2282, 7528, 24834.

Les temps de calcul augmentent rapidement avec n , et même un ordinateur puissant finit par s'essouffler. Nous devons nous contenter de calculer le nombre des classes de tectoèdres en fonction de leur ordre, sans chercher à déterminer leur formule. Un détour nous y conduit, de façon inattendue.

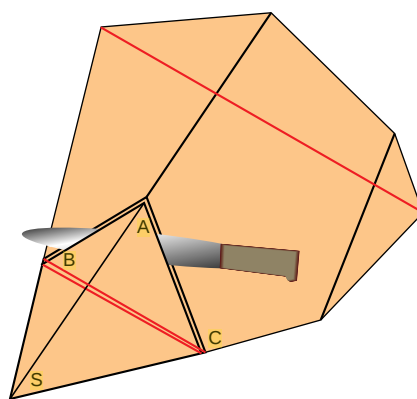
DUALITÉ

Depuis Euler, on sait associer à un polyèdre donné un autre polyèdre, nommé dual du premier, en opérant de la façon suivante : on marque un point dans chaque face et on relie par un segment les points qui sont situés dans des faces ayant une arête commune. Ainsi le dual d'un cube est un octaèdre, et réciproquement. Pour les tectoèdres, nous opérerons de manière un peu différente, en ne tenant pas compte de la base.

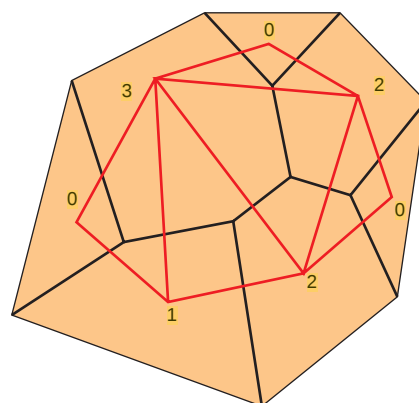
On peut alors faire la construction indiquée précédemment sur la projection du tectoèdre. Le résultat obtenu (voir la figure 8) est assez surprenant : c'est le dessin d'un polygone où sont tracées des diagonales. Les côtés de ce polygone correspondent aux arêtes latérales du tectoèdre (ils les coupent), et les diagonales à ses arêtes sommitales (elles les coupent). En outre, les diagonales partagent ce polygone en triangles dont les sommets sont ceux du polygone lui-même et qui ont, en commun avec lui, deux côtés, un seul côté ou aucun, selon qu'ils contiennent un sommet de type 1, 2 ou 3. Autrement dit, le problème initial de géométrie à trois dimensions se ramène à un problème de géométrie plane, celui de la triangulation des polygones.

Tout ce qui a été démontré pour les tectoèdres a un énoncé dual valable pour cette triangulation. Considérons, par exemple, la formule d'un tectoèdre : puisque ses termes indiquent le nombre des arêtes sommitales des différentes faces, ils indiquent aussi le nombre des diagonales issues des sommets du polygone dual. Autrement dit, la formule d'un tectoèdre caractérise aussi la triangulation du polygone associé par dualité.

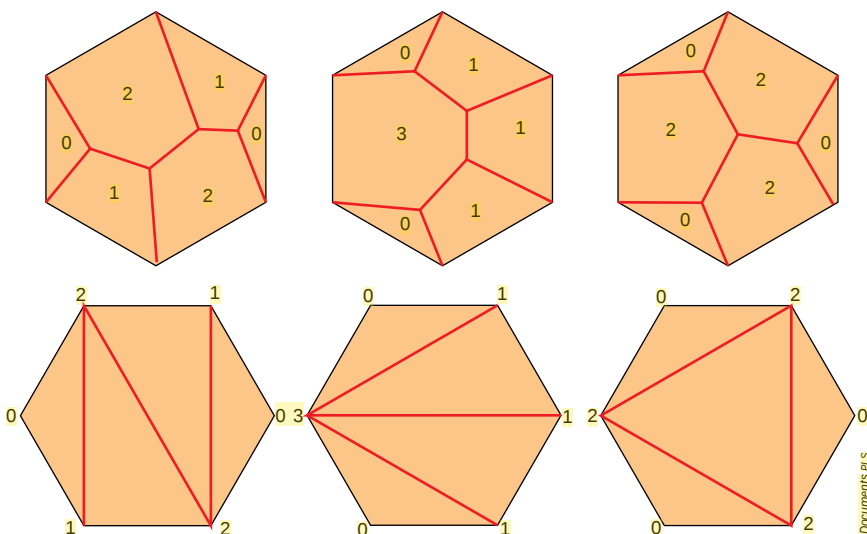
L'opération duale de la troncature est l'adjonction au polygone triangulé d'un triangle supplémentaire ayant pour base un côté du polygone. Cette adjonction provoque l'apparition d'un sommet d'où



7. Les troncatures font apparaître des faces triangulaires.



8. Un tectoèdre et le dual de sa projection (en rouge).



9. Les trois tectoèdres que l'on peut construire sur un hexagone régulier (en haut) et les trois triangulations de ces tectoèdres (en bas). En haut, les nombres repèrent le nombre d'arête sommitales de faces ; en bas, ils correspondent au nombre de diagonales issues du sommet qui leur correspond.

ne part aucune diagonale (donc d'un zéro dans la formule) et l'augmentation d'une unité du nombre des diagonales issues des deux autres sommets de ce triangle. La figure 9 montre les trois triangulations possibles de l'hexagone, duales des trois tectoèdres d'ordre six.

La triangulation des polygones est un problème classique de géométrie combinatoire : on sait calculer le nombre des triangulations possibles d'un polygone. Le problème de dénombrement des tectoèdres est donc résolu. Voici la formule qui donne ce nombre en fonction de n :

$$(2n-5)!/n!(n-3)!+3(n-3)!/2(n/2)!((n-4)/2)! + (n-3)!/2((n-1)/2)!((n-3)/2)! + ((2n-6)/2)!/3(n/3)!((n-3)/3)!$$

Dans cette formule, $n!$ (qui se lit «factorielle n ») représente le produit des n premiers nombres entiers. De surcroît, on convient de remplacer par zéro tout terme contenant une factorielle portant sur des nombres non entiers. On retrouve alors les valeurs précédemment calcu-

lées sur ordinateur. Ce nombre augmente très vite avec n : pour n égal à 20, il est supérieur à dix millions.

En faisant des tas de sable, nous avons été amenés à étudier de curieux polyèdres, et aussi à découvrir une classification insolite des polygones convexes. Les tas de sable nous réservent-ils d'autres surprises ?

Roger Iss est ancien professeur de mathématiques spéciales du Lycée Kléber, à Strasbourg.

Roger Iss, *Considérations sur une famille de polyèdres*, in *L'Ouvert* (publication de l'Association des professeurs de mathématiques d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg), n° 51, juin 1988.

Roger Iss, *Des tas de sable aux graphes*, in *L'Ouvert*, n° 56, septembre 1989.

Roger Iss, *Les tectoèdres*, Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, n° 402, mars 1996.