

La ressemblance mathématisée

JEAN-PAUL DELAHAYE

Être intelligent c'est voir des ressemblances, mais qu'est-ce qu'une ressemblance ?

Que la tête de Louis Philippe ressemble à une poire, c'est ce que les caricatures ont montré. Que la carte de l'Italie ressemble à une botte, cela saute aux yeux. Que le bruit de la grosse caisse ressemble au tonnerre, le compositeur le sait et l'utilise. Que l'histoire de *La bicyclette bleue* ressemble à celle d'*Autant en emporte le vent*, c'est ce que les juges ont dû évaluer. La reconnaissance de la ressemblance est essentielle à notre survie : sans une notion instinctive de «situation équivalente», sans une maîtrise des «visages semblables», des «animaux de la même espèce», etc., nous ne pourrions nous orienter, nous reconnaître, identifier les aliments comestibles, les bêtes dangereuses.

La difficulté est que la même eau ne coule jamais deux fois sous le pont : deux situations ne sont jamais identiques en tout point, jamais deux animaux ne sont exactement pareils, jamais le visage de nos connaissances ne présente le même aspect à deux instants différents, etc.

Nous savons pourtant juger que deux situations, deux objets, deux images sont analogues, et cette capacité est une composante essentielle de l'intelligence. L'un des problèmes majeurs de l'Intelligence

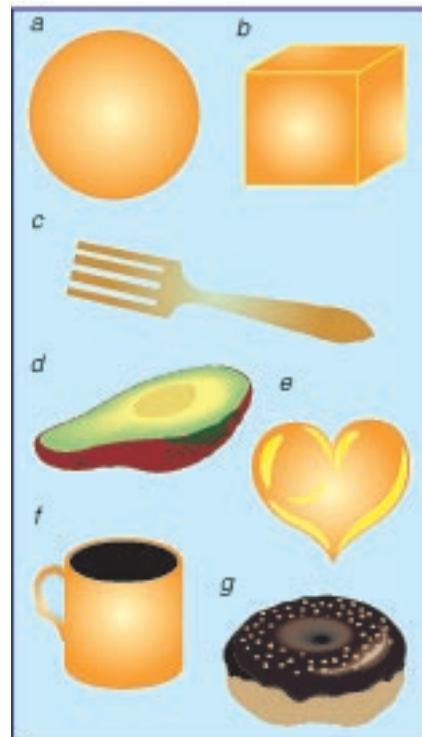
artificielle est de confectionner des programmes qui, au moins partiellement, reconnaissent des objets approchants. Le problème est difficile (et tout progrès en Intelligence artificielle est difficile), mais faut-il pour cela renoncer à le résoudre et penser qu'il est définitivement hors de portée ?

Les mathématiques qui prétendent fournir des outils pour comprendre le monde, le modéliser, le maîtriser proposent-elles de bonnes théories de la ressemblance ?

Nous verrons que oui en examinant plusieurs de ces théories. La dernière d'entre elles a été créée récemment par un groupe de physiciens, de mathématiciens et d'informaticiens : elle est fascinante par les liens qu'elle établit avec la thermodynamique et parce qu'on peut la considérer comme la théorie ultime de la ressemblance.

LES SEMBLABLES GÉOMÉTRIQUE ET TOPOLOGIQUE

L'idée mathématique la plus ancienne est celle de semblable géométrique : deux objets sont semblables si, en leur faisant effectuer des translations, des rotations, des symétries et des homo-



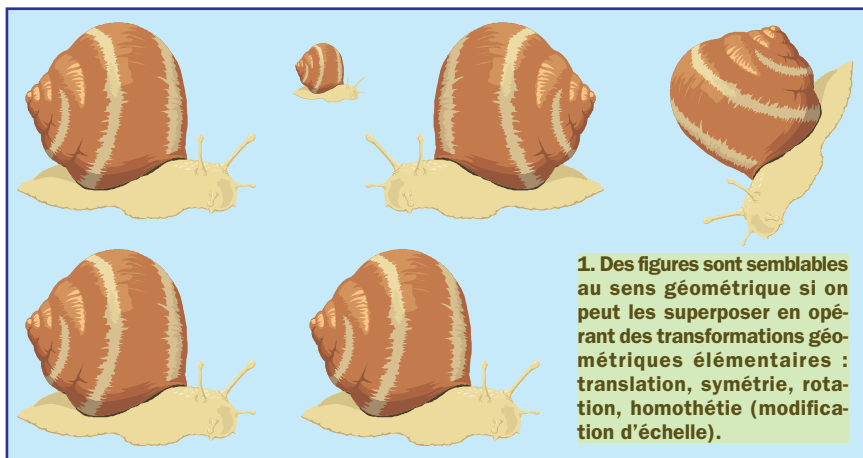
2. La surface d'un ballon peut se déformer continûment et prendre la forme d'un cube, d'un demi-avocat, d'un cœur, ou même d'une fourchette. Ces objets sont topologiquement semblables et pourtant, il est inacceptable de les considérer «semblables». La tasse et le gâteau torique sont topologiquement équivalents entre eux mais pas à la sphère.

thétiques (agrandissements et rapetissements bien proportionnés), on peut les superposer.

Cette notion de figures géométriques semblables est utile pour faire des plans de voitures ou de maisons, mais elle est trop limitée, car trop rigide. Ce n'est pas elle qui pourra, par exemple, nous indiquer si deux photographies différentes représentent le même visage. Les mathématiciens, conscients de cette limite, ont proposé une notion bien plus souple de ressemblance : l'homéomorphie.

Deux surfaces sont homéomorphes si, en imaginant qu'elles sont fabriquées avec un caoutchouc parfait, on peut déformer l'une en l'autre sans faire de déchirure. Cette fois, la notion de ressemblance obtenue est trop molle ! La surface d'un cube est topologiquement semblable à celle d'un ballon ou même d'une fourchette. La *ressemblance topologique* conduit d'ailleurs à des situations paradoxales : un système d'anneaux enlacés est transformable progressivement en le même système d'anneaux libérés. Bien d'autres notions de topologie généralisent et étendent celle d'homéomorphisme, mais chacune ne saisit qu'une part bien mince de l'idée d'analogie.

Une raison en est sans doute que,



1. Des figures sont semblables au sens géométrique si on peut les superposer en opérant des transformations géométriques élémentaires : translation, symétrie, rotation, homothétie (modification d'échelle).

pour traiter de figures semblables, il faut renoncer à donner une réponse OUI ou NON et confectionner une *mesure de ressemblance*. Cette évaluation numérique va être donnée par ce qu'on appelle des distances : deux objets identiques seront à distance nulle ; deux objets très semblables seront à petite distance l'un de l'autre ; la distance entre deux objets très différents sera grande.

LA DISTANCE DE HAUSDORFF

Une première distance satisfaisante dans un assez grand nombre de cas est la distance de Hausdorff, nommée ainsi pour honorer Félix Hausdorff, mathématicien allemand mort en 1942. En 1914, Hausdorff a formulé les axiomes généraux de la topologie.

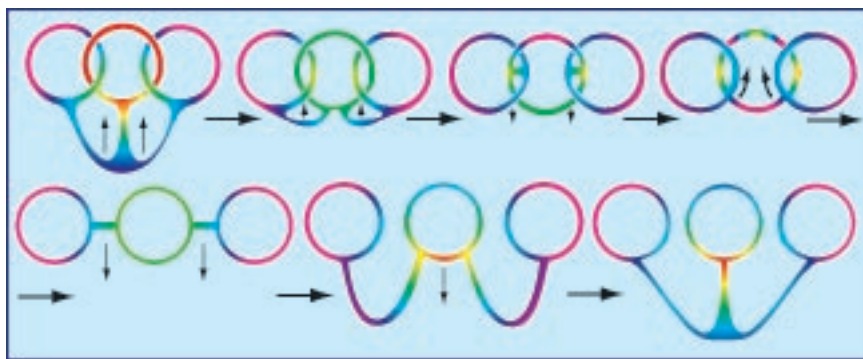
La distance de Hausdorff mesure la distance entre objets dessinés en noir et blanc sur une feuille de papier (des généralisations aux espaces à trois dimensions ou plus, ou prenant en compte les couleurs sont possibles). Pour définir cette distance entre figures, on utilise la notion usuelle de distance entre deux points.

Par définition, deux objets A et B dessinés sur une feuille de papier (c'est-à-dire deux ensembles de points A et B) sont à une distance de Hausdorff l'un de l'autre de moins de r unités, si chaque point de A est à moins de r unités d'au moins un point de B , et si, réciproquement, chaque point de B est distant de moins de r unités d'au moins un point de A .

Un procédé simple permet de visualiser ce qu'est la distance de Hausdorff entre deux ensembles A et B : on remplace chaque point de l'ensemble A par une petite tache ronde dont on fait grossir le rayon r jusqu'à ce que B soit recouvert par ce « A gonflé». On imagine aussi le processus réciproque (le recouvrement de A par un « B gonflé»). La distance de Hausdorff entre A et B est le plus petit r permettant simultanément les deux recouvrements.

Cette distance saisit correctement de nombreux aspects de l'idée intuitive de ressemblance. On considérera que deux dessins ne différant que par l'épaisseur des traits, ou par le fait que l'un est dessiné en pointillé, sont très proches l'un de l'autre : dès que l'on fait un peu gonfler l'un, il recouvre l'autre.

De même, la version brouillée d'un dessin A à travers un miroir dépoli sera peu distante du dessin A : de même encore, si, dans un dessin, vous remplacez les zones noires par des zones finement hachurées ou par des zones emplies de points aléatoires, alors la distance de la figure initiale à sa transformée sera petite.



3. Les transformations continues des surfaces réalisées en caoutchouc idéal permettent de passer d'une forme enlacée à une autre désenlacée, et «apparemment» sans rapport. Le semblable topologique apparaît trop tolérant.

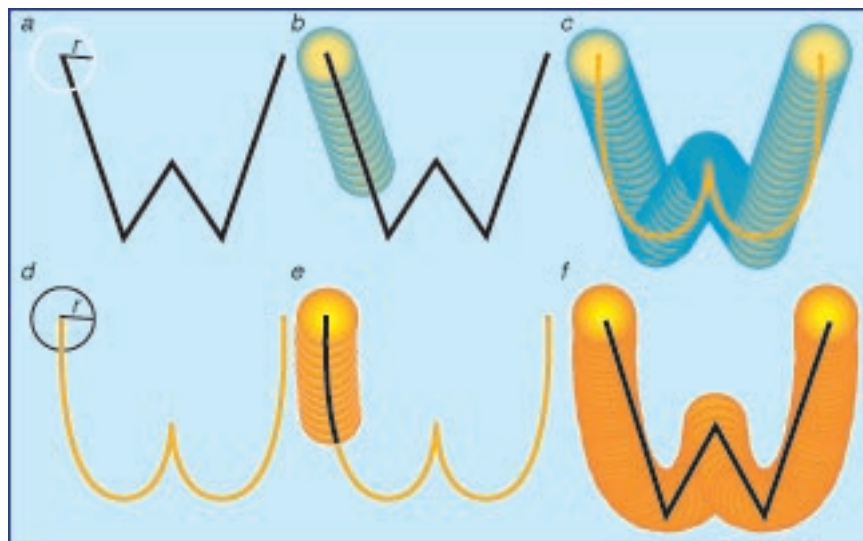
Un disque et une ellipse peu aplatie de rayons comparables seront proches pour la distance de Hausdorff. Un carré et un cercle, en revanche, seront plus éloignés. De façon générale, changer la texture ou déplacer légèrement les points d'un dessin en en préservant l'allure générale produit un dessin proche pour la distance de Hausdorff, alors que changer les formes crée des dessins éloignés.

Un cas intéressant est celui de l'approximation finie d'ensembles infinis. Un dessin comportant un nombre infini de points – par exemple, un disque plein – peut être approché de plus en plus finement par une série de figures ayant chacune un nombre fini de points. Ici l'infini, même non dénombrable, se laisse approcher facilement par du fini.

Cette distance est d'ailleurs implicitement utilisée par tous ceux qui dessinent des fractales : jamais personne ne dessine vraiment une fractale,

celle-ci étant, par définition, infiniment découpée, ce qu'aucun écran, aucun crayon, aucune imprimante ne réussit jamais à reproduire (notons aussi que personne ne dessine non plus de vrais cercles ou de vraies lignes). En revanche, les représentations qu'on donne des fractales sont bien des objets proches au sens de la distance de Hausdorff : comme Monsieur Jourdain faisait de la prose sans le savoir, nous utilisons la notion de ressemblance à la manière de Hausdorff sans jamais en avoir entendu parler.

Puisque deux dessins proches au sens intuitif sont mesurés proches au sens de la distance de Hausdorff, on comprend pourquoi cette distance est un outil essentiel de la morphologie mathématique, la discipline dont le but est la compréhension et l'analyse des images et des formes, et dont les applications concernent la vision artificielle, le traitement informatisé des images, la biologie et la géologie.



4. La distance de Hausdorff est le rayon r le plus petit tel qu'en remplaçant chaque point de A par un disque de rayon r on recouvre B , et inversement. C'est une vraie distance : $d(A,A) = 0$, $d(A,B) = d(B,A)$, $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$ lorsque A , B et C sont des ensembles non vides et fermés (X est fermé si toute suite convergente de points de X a sa limite dans X).