

pour traiter de figures semblables, il faut renoncer à donner une réponse OUI ou NON et confectionner une *mesure de ressemblance*. Cette évaluation numérique va être donnée par ce qu'on appelle des distances : deux objets identiques seront à distance nulle ; deux objets très semblables seront à petite distance l'un de l'autre ; la distance entre deux objets très différents sera grande.

LA DISTANCE DE HAUSDORFF

Une première distance satisfaisante dans un assez grand nombre de cas est la distance de Hausdorff, nommée ainsi pour honorer Félix Hausdorff, mathématicien allemand mort en 1942. En 1914, Hausdorff a formulé les axiomes généraux de la topologie.

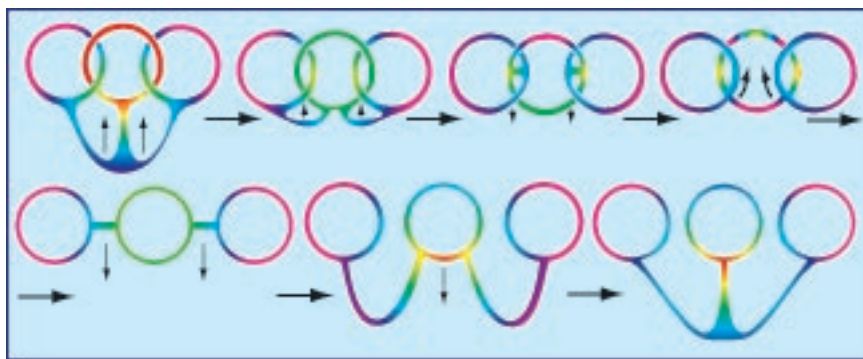
La distance de Hausdorff mesure la distance entre objets dessinés en noir et blanc sur une feuille de papier (des généralisations aux espaces à trois dimensions ou plus, ou prenant en compte les couleurs sont possibles). Pour définir cette distance entre figures, on utilise la notion usuelle de distance entre deux points.

Par définition, deux objets A et B dessinés sur une feuille de papier (c'est-à-dire deux ensembles de points A et B) sont à une distance de Hausdorff l'un de l'autre de moins de r unités, si chaque point de A est à moins de r unités d'au moins un point de B , et si, réciproquement, chaque point de B est distant de moins de r unités d'au moins un point de A .

Un procédé simple permet de visualiser ce qu'est la distance de Hausdorff entre deux ensembles A et B : on remplace chaque point de l'ensemble A par une petite tache ronde dont on fait grossir le rayon r jusqu'à ce que B soit recouvert par ce « A gonflé». On imagine aussi le processus réciproque (le recouvrement de A par un « B gonflé»). La distance de Hausdorff entre A et B est le plus petit r permettant simultanément les deux recouvrements.

Cette distance saisit correctement de nombreux aspects de l'idée intuitive de ressemblance. On considérera que deux dessins ne différant que par l'épaisseur des traits, ou par le fait que l'un est dessiné en pointillé, sont très proches l'un de l'autre : dès que l'on fait un peu gonfler l'un, il recouvre l'autre.

De même, la version brouillée d'un dessin A à travers un miroir dépoli sera peu distante du dessin A : de même encore, si, dans un dessin, vous remplacez les zones noires par des zones finement hachurées ou par des zones emplies de points aléatoires, alors la distance de la figure initiale à sa transformée sera petite.



3. Les transformations continues des surfaces réalisées en caoutchouc idéal permettent de passer d'une forme enlacée à une autre désenlacée, et «apparemment» sans rapport. Le semblable topologique apparaît trop tolérant.

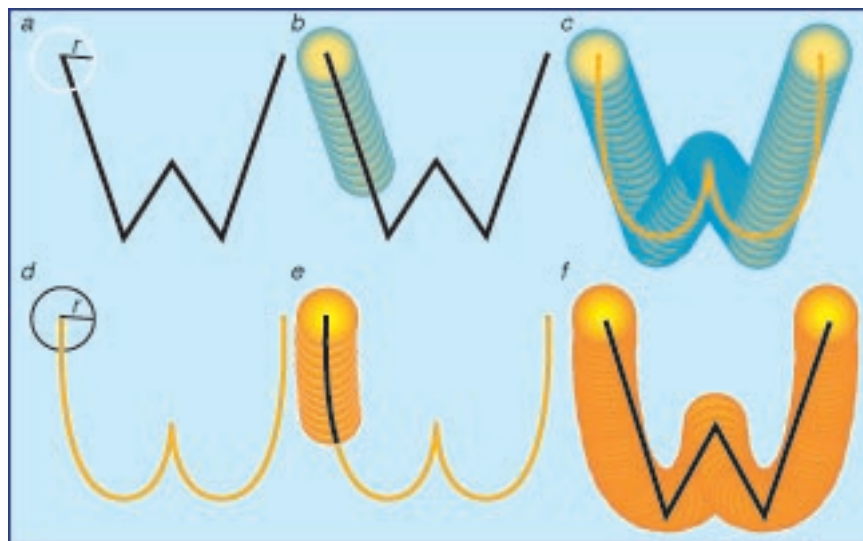
Un disque et une ellipse peu aplatie de rayons comparables seront proches pour la distance de Hausdorff. Un carré et un cercle, en revanche, seront plus éloignés. De façon générale, changer la texture ou déplacer légèrement les points d'un dessin en en préservant l'allure générale produit un dessin proche pour la distance de Hausdorff, alors que changer les formes crée des dessins éloignés.

Un cas intéressant est celui de l'approximation finie d'ensembles infinis. Un dessin comportant un nombre infini de points – par exemple, un disque plein – peut être approché de plus en plus finement par une série de figures ayant chacune un nombre fini de points. Ici l'infini, même non dénombrable, se laisse approcher facilement par du fini.

Cette distance est d'ailleurs implicitement utilisée par tous ceux qui dessinent des fractales : jamais personne ne dessine vraiment une fractale,

celle-ci étant, par définition, infiniment découpée, ce qu'aucun écran, aucun crayon, aucune imprimante ne réussit jamais à reproduire (notons aussi que personne ne dessine non plus de vrais cercles ou de vraies lignes). En revanche, les représentations qu'on donne des fractales sont bien des objets proches au sens de la distance de Hausdorff : comme Monsieur Jourdain faisait de la prose sans le savoir, nous utilisons la notion de ressemblance à la manière de Hausdorff sans jamais en avoir entendu parler.

Puisque deux dessins proches au sens intuitif sont mesurés proches au sens de la distance de Hausdorff, on comprend pourquoi cette distance est un outil essentiel de la morphologie mathématique, la discipline dont le but est la compréhension et l'analyse des images et des formes, et dont les applications concernent la vision artificielle, le traitement informatisé des images, la biologie et la géologie.



4. La distance de Hausdorff est le rayon r le plus petit tel qu'en remplaçant chaque point de A par un disque de rayon r on recouvre B , et inversement. C'est une vraie distance : $d(A,A) = 0$, $d(A,B) = d(B,A)$, $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$ lorsque A , B et C sont des ensembles non vides et fermés (X est fermé si toute suite convergente de points de X a sa limite dans X).